

821/125

33441



常 庚 哲

图书馆专用章

# 抽屉原则及其他

上海教育出版社

821/125

# 抽屈原則及其他

常 庚 哲

上海教育出版社

# 抽屉原则及其他

· 常 庚 哲

上海教育出版社出版

(上海永福路 123 号)

新华书店上海发行所发行 上海崇明印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 1.875 字数 88,000

1978 年 12 月第 1 版 1978 年 12 月第 1 次印刷

印数 1—80,000 本

统一书号: 7150·1967 定价: 0.15 元

# 前 言

“把  $n+1$  个或者更多的物体放到  $n$  个集合之中,那末,至少有一个集合里要放进两个或者更多的物体”,这就是抽屉原则的最简单的形式. 抽屉原则又叫重迭原则,虽然它的正确性十分明显,很容易被不具备多少数学知识的人所接受,但是,加以灵活运用,可能得到一些意想不到的结果. 各种形式的抽屉原则,在初等数学乃至高等数学中,经常地被采用着.

本书以抽屉原则为主题,着重介绍了它在初等数论中的一些应用. 因此,书中不得不引进“初等数论”中的一些基本知识,例如:同余式,用有理数来逼近无理数,不定方程,数的几何等等,但并不对这些作进一步的讨论. 作者之所以作出这种安排,是希望读者不单单知道什么是“抽屉原则”——这本来是不难做到的,还能接触到一些在中学数学教材中读不到的内容,以扩大他们的知识面,增强他们学习数学的兴趣.

1978年4月,在全国部分省市中学生数学竞赛举行的前夕,作者曾以《抽屉原则》为题,在安徽省几个城市对中学生作过讲演. 本书就是在当时讲稿的基础上扩充而成的. 在编写本书第七节佩尔方程的时候,征得严士健同志的同意,吸收了他发表在《数学通报》1957年第7期上的一篇文章的部分内容,特此志谢. 冯克勤、单墀、杨劲根和李克正同志给作者提供了一些有趣的例题和习题,单墀同志还详细阅读了第七节的初稿,提出了若干有益的建议,作者对他们表示衷心的感谢!

由于作者水平的限制,错误和不妥之处,恐难避免,切望读者批评指正.

作 者

于1978年7月



## 目 录

### 前言

一、第一堂算术课.....	1
二、抽屉原则 .....	2
三、一些例子 .....	4
四、剩余类.....	14
五、有理数和无理数.....	20
六、不定方程.....	27
七、佩尔方程.....	30
八、面积的重迭原则.....	38
练习题.....	45
练习题解答概要.....	48

## 一、第一堂算术课

新学年开始了。

开学的那一天，红星小学一年级一班第一堂就是算术课。任课的张老师，是一位很有经验、很有水平的老教师。她讲课深入浅出，活泼生动，凡是长期听张老师讲课的同学，总是不知不觉地对数学发生了浓厚的兴趣。

张老师走进课堂，全班同学起立，向这位辛勤的园丁致敬。环视那几十张陌生而可爱的小脸，张老师心里充满了无限的喜悦。她用简单而诚挚的语言向新同学表示祝贺和欢迎，接着说道：“我校今年招收了三百七十名一年级新生，他们都年满六岁但还不到七岁。我说呀，这么多的新同学中间，一定有两个人是同年、同月、同日出生的。小同学们，你们说对不对？”

对于这个新奇的结论，大家感到有趣而又惊讶。同学们低声地互相议论起来了。

“张老师知道我们每一个人的生日了吗？”

“不会的。她今天同我们才头一次见面，连我们的名字恐怕都叫不上来。”

“……”

“张老师一定查看过我们的报名登记表了！”

这一句话恰巧被张老师听见了，她笑着说：“我没有看过你们的登记表，而且，完全不必要看这些表，就可以得出这个

结论。”

同学们更惊奇了！

张老师接着说：“同学们想想看，把十只苹果放到九个抽屉中去，无论怎么放，这九个抽屉中一定有一个抽屉里放了两只或两只以上的苹果。你们说对吗？”

“对！对！”同学们齐声回答。小朋友所具备的常识，就足以使他们明白：要是每个抽屉中最多只有一只苹果的话，那么九个抽屉至多才装着九个苹果。

“好！我们把一年中的三百六十五天（闰年三百六十六天）的每一天，看成一个抽屉，而把三百七十个新同学中的每一个人看成一只“苹果”。按照“苹果”出生的日子，把他们放到对应的抽屉中去。由于“苹果”数目多于“抽屉”数目，就能知道：一定有一个“抽屉”中，至少放着两只“苹果”。这就是说：至少有两个同学的生日相同。再根据同学们的年龄的差别不超过一岁，所以，这两个同学一定是同年、同月、同日出生的了。”

小朋友们恍然大悟，会心地微笑了。

## 二、抽屉原则

运用第一节中采用过的推理方法，我们还可以证明如下的更加令人惊讶的结论。

根据常识，一个人的头发的根数不会超过二十万。因此，在一个拥有二十多万人口的城市中，一定有那么两个人，他们的头发的根数相同。

推理方法如下：我们设置二十万零一个“抽屉”，并且对

每一个“抽屉”依次标上从 0, 1, 2, 3, ... 直到 200000 之中的一个号码。按各人头上头发的根数归入相应的一个“抽屉”，比如说，如果张乐平同志画的三毛生活在这个城市，那么他就被归为标有号码“3”的那个“抽屉”；我们没有理由排除这个城市中有留着光头的人，所以必须设置“0”号“抽屉”。由于人的数目多于“抽屉”的数目，可以断定，一定至少有两个人与同一“抽屉”相对应，这两个人自然就有同样多根头发了。

容易看到，这从本质上来说，仍然是前节中“十只苹果”和“九个抽屉”的推理方法。这种推理的正确性，“显然”到了连小学一年级的学生也能完全接受。如果把这种推理推广到更加一般的形式，其正确性也完全可以被不具备多少数学知识的人所认识。

怎样把这种推理推广到一般形式呢？我们来注意以下两点：

1. 如果将“苹果”换成“皮球”、“铅笔”或“数”，同时将“抽屉”相应地换成“袋子”、“文具盒”或“数的集合”，那么仍旧可以得出相同的结论。

这就是说：推理的正确性与具体的对象没有关系。我们把一切可以同“苹果”互换的对象称之为“元素”，而把一切可以同“抽屉”互换的对象称之为“集合”，从而得知：十个元素以任意的方式归入九个集合之中，那么其中一定有一个集合中至少包含两个元素。

2. “苹果”和“抽屉”的具体数目是无关紧要的，只要苹果（元素）的个数比抽屉（集合）的个数多，那么推理照样成立。

于是，我们就可以把“十只苹果”和“九个抽屉”的推理方法，推广到下述一般形式：

原则一 把多于  $n$  个的元素按任一确定的方式分成  $n$  个



集合,那么一定有一个集合中含有两个或两个以上的元素.

原则一还有以下更加一般的形式:

原则二 把多于  $m \times n$  个的元素按任一确定的方式分成  $n$  个集合,那么一定有一个集合中含有  $m+1$  个或  $m+1$  个以上的元素.

这是很明显的,因为若每个集合中所含元素的数目均不超过  $m$ ,那么这  $n$  个集合所含元素个数就不会超过  $m \times n$ .

原则三 把无穷个元素按任一确定的方式分成有穷个集合,那么至少有一个集合中仍含无穷多个元素.

这也是很显然的,这是因为,如果每个集合中只含有穷多个元素,那么有穷个集合只能包含有穷个元素.

以上三个原则都称为抽屉原则. 看上去,它们都是非常简单的. 可是,正是这样一些很简单的原则,在初等数学乃至高等数学中,有着许多应用. 巧妙地运用这些原则,可以很顺利地解决一些看上去相当复杂、甚至觉得简直无从下手的数学题目.

### 三、一些例子

在本节,我们运用抽屉原则,来证明初等数学中的一些题目.

[例1] 在边长为1的正方形内任意放置五个点,求证:其中必有两点,这两点之间的距离不大于  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

证明 将这个正方形的两对对边上的中点连接起来,把它分成四个大小相等的小正方形(图1). 在大正方形里任放

五个点，就相当于把五个点以任一确定的方式投放在这四个小正方形中。这里，我们把每一个小正方形看成一个“抽屉”，于是问题就归结为把五个元素(点)放入四个“抽屉”(小正方形)。根据前节的原则一，必有一个小正方形，其中包含两个或两个以上的点，对于其

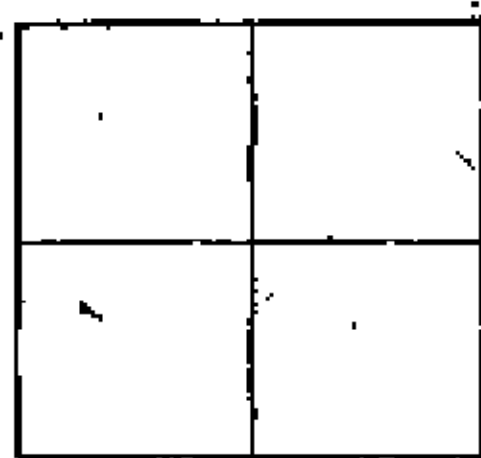


图 1

中的两点，它们间的距离不会超过小正方形对角线的长度(即大正方形对角线长度的一半)，即不大于  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

[例 2] 空间中有六个点，其中任何三点都不共线，任何四点都不共面。在每两点之间连起直线段之后，将每一条这样的线段或涂上红色，或涂上蓝色，求证：不论如何涂色，一定存在一个三角形，它的三边有相同的颜色。

**证明** 从任一点出发，到其余五个点，共可联五条线段。由于这五条线段已被红、蓝两种颜色所涂染，如果把红线段分入一个“抽屉”，蓝线段分入另一个“抽屉”，于是问题就归结为五个元素(线段)，即多于  $2 \times 2$  个元素，分到 2 个“抽屉”(蓝色或红色)，按照原则二，其中至少有三条线段被分入同一“抽屉”，

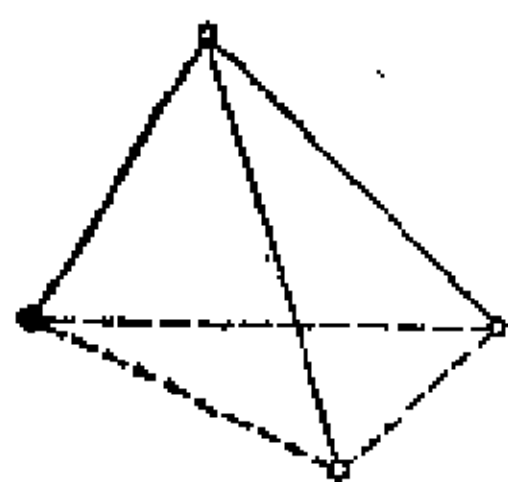


图 2

即染有相同的颜色，例如说是红色(图 2 中的实线)。我们来考察这三条由同一点出发，具有相同颜色的线段，把这三条线段的另外三个端点两两联接起来，就构成了图 2 所示的虚线三角形。如果有一条虚线被涂成红色，那么它就和两条实线组成一个

红边三角形；如果这三条虚线中一条红边也没有，那么它们本身就组成一个蓝边三角形了。

[例 3] 在边长为 1 的正方形中，任意放入 9 个点，证

明：在以这些点为顶点的许许多多三角形中，必有一个三角形，它的面积不超过  $\frac{1}{8}$ 。（1963 年北京市数学竞赛试题）

**证明** 用三条平行于上下底边的直线，把正方形分成四个大小相等的长方形。九个点任意放入这四个长方形中，根据原则二，即多于  $2 \times 4$  个点放入四个长方形中，则至少有  $2+1$  个点（即三个点）落在某一个长方形之内。现在，特别取出这个长方形来加以讨论（图 3）。

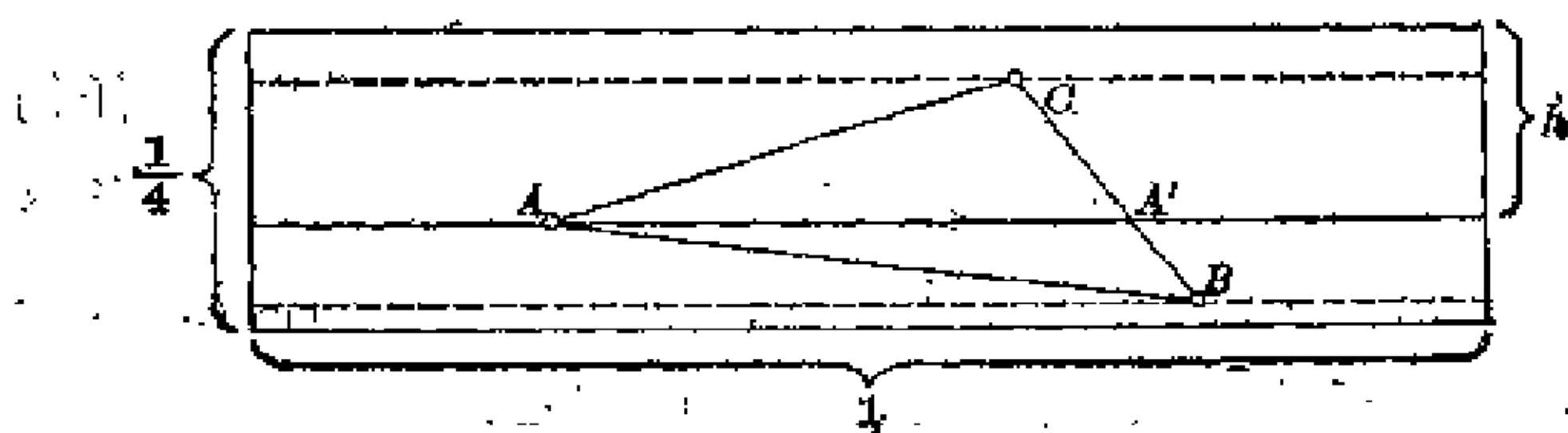


图 3

把落在这长方形中的三点记为  $A$ 、 $B$ 、 $C$ ，通过这三点分别作平行于底边的直线。由图 3 显然可见

$$\begin{aligned} \triangle ABC \text{ 的面积} &= \triangle AA'B \text{ 的面积} + \triangle AA'C \text{ 的面积} \\ &\leq \frac{1}{2} \times 1 \times h + \frac{1}{2} \times 1 \times \left( \frac{1}{4} - h \right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}, \end{aligned}$$

这样就得到了需要证明的结论。

**[例 4]** 一个正方形被分成了  $15 \times 15 = 225$  个大小相同的小方格（图 4）。在每一个小方格中，任意填写  $1, 2, 3, \dots, 55, 56$  中的一个数。求证：一定能够找到四个小方格，它们的中心构成一个平行四边形的四个顶点，并且这平行四边形各条对角线两端的两个小方格中的数字之和相等。

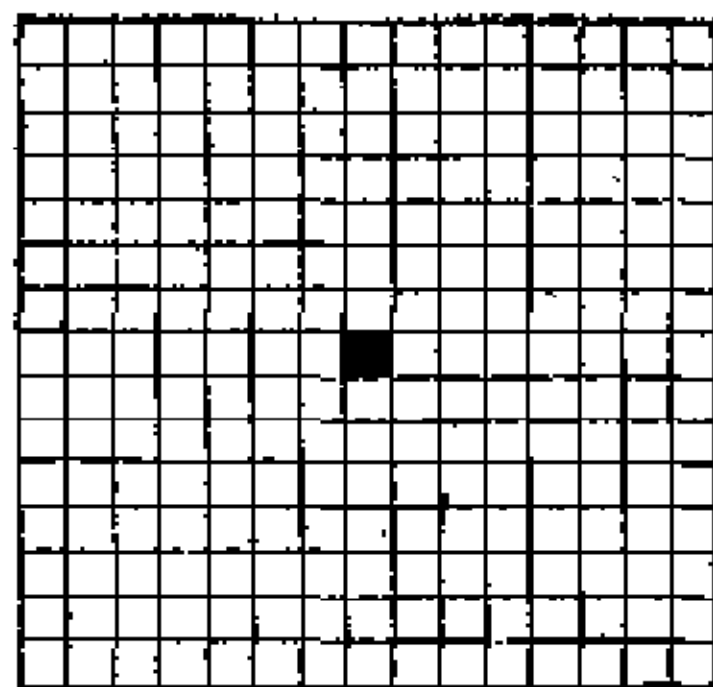


图 4

**证明** 由于 15 是一个奇数, 所以一定有一个小方格处在  
大正方形的中心位置, 我们把它称为“中心小方格”, 在图 4 中  
用黑色标出. 把关于中心小方格为中心对称的每两个小方格  
配成一对, 这样, 便把除去中心小方格之外的 224 个小方格配  
成了 112 对. 在任一对这种小方格中, 令  $x$  表示其中一个小  
方格中所放的数,  $x^*$  表示其对称的另一小方格中所放的数, 由  
假设可知

$$1 \leq x \leq 56, \quad 1 \leq x^* \leq 56.$$

所以

$$2 \leq x + x^* \leq 112.$$

这就是说, 任何一对小方格中两数之和不外乎

$$2, 3, 4, \dots, 110, 111, 112$$

这 111 种可能. 但是, 我们共有 112 对小方格. 根据原则一,  
必有至少两对小方格, 使得各对中两数之和为同一数字. 每  
对小方格的中心的连线, 假如它们不重合的话, 必在中心小方  
格的中心处互相平分, 所以这时四个小方格的中心是一个平  
行四边形的四个顶点.

把连线互相重合的情形, 看作是一个蜕化了的平行四边  
形, 可以认为, 在这种情况下, 结论仍然是正确的.

[例 5] 从自然数集

$$\{1, 2, 3, 4, \dots, 99, 100\}$$

中, 随意选出 51 个数来, 求证: 其中一定有两个数, 它们中的某一个数是另外一个的整倍数.

**证明** 首先注意, 一个正整数要么本身是一个奇数, 要么是一个偶数. 若是一个偶数时, 则经过反复地提取因数“2”, 最后总能表示为: 奇数  $\times 2^l$  (其中  $l=1, 2, 3, \dots$ ) 的形式. 并且, 这个奇数决不会超过原数的一半. 例如

$$16 = 8 \times 2 = 4 \times 2^2 = 2 \times 2^3 = 1 \times 2^4,$$

$$24 = 12 \times 2 = 6 \times 2^2 = 3 \times 2^3,$$

如果容许  $l=0$ , 那么奇数也被包括在上述一般形式之中.

现在, 把 1 到 100 的全部整数, 分成下面的 50 个集合:

$$\mathcal{M}_1 = \{1, 1 \times 2, 1 \times 2^2, 1 \times 2^3, 1 \times 2^4, 1 \times 2^5, 1 \times 2^6\},$$

$$\mathcal{M}_2 = \{3, 3 \times 2, 3 \times 2^2, 3 \times 2^3, 3 \times 2^4, 3 \times 2^5\},$$

$$\mathcal{M}_3 = \{5, 5 \times 2, 5 \times 2^2, 5 \times 2^3, 5 \times 2^4\},$$

$$\mathcal{M}_4 = \{7, 7 \times 2, 7 \times 2^2, 7 \times 2^3\},$$

.....

$$\mathcal{M}_{25} = \{49, 49 \times 2\},$$

$$\mathcal{M}_{26} = \{51\},$$

.....

$$\mathcal{M}_{50} = \{99\}.$$

很明显, 1, 2, ..., 100 这一百个整数没有遗漏地被放入了这五十个集合, 并且, 同一个数字决不会出现在两个不同的集合中 (读者可自行证明这一结论). 因此, 不论用何种方式从中取出 51 个数时, 必然有至少两个数是出自同一集合的, 而同一集合中的两数, 大数必定是小数的整倍数.

在讨论下一个例子之前, 我们介绍几个数学中的基本概



念. 按照一定顺序排列起来的数串

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots, \quad (1)$$

称为一个数列. 如果其中包含无穷多项, 称之为无穷数列; 若只含有穷项, 则称为有穷数列. 无穷数列和有穷数列统称为“数列”. 每个  $a_i$  称为数列的一项, 自然数  $i$  叫做这一项的足标, 它指示着这一项在数列中所处的位置. 例如

$$1, 2, 3, \dots, n, \dots \quad (\text{其中 } a_n = n);$$

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots \quad (\text{其中 } a_n = (-1)^{n-1});$$

$$1, \sqrt{2}, \frac{1}{2}, -1, 0, 2,$$

都是数列, 其中头两个是无穷数列, 最后一个是有穷数列(因为它只含六项).

如果数列(1)适合

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \dots,$$

称(1)为一个上升数列, 如果上述不等式中每一个“ $\leq$ ”都成立着不等号“ $<$ ”, 则称(1)为严格上升数列. 类似地, 如果数列(1)适合

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \dots,$$

就说(1)是一个下降数列, 如果上述不等式的每一个“ $\geq$ ”都成立着不等号“ $>$ ”, 则称(1)为严格下降数列. 上升数列和下降数列统称单调数列. 例如, 前面的三个数列的头一个是单调数列, 并且是严格上升数列; 而后两个数列都不是单调数列.

从数列(1)中取出一部分项来, 但不改变它们在原数列(1)中的先后顺序, 这样就得到了一个新的数列, 它叫做数列(1)的一个子数列. (1)的任一个子数列可以这样来表示:

$$a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, \dots, a_{i_n}, a_{i_{n+1}}, \dots,$$

其中的足标必须适合

$$1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < \cdots < i_n < i_{n+1} < \cdots,$$

这就是说,子数列中项的先后顺序必须保持它们在原数列中的先后顺序.注意以下两种极端情况:数列(1)本身一定是(1)的子数列;任意抽出(1)的某一项所组成的数列必是(1)的子数列.很显然,这两种极端情况完全符合子数列的定义.

有了上述这些准备之后,就可以继续我们的讨论了.

[例6] 任意给定由  $n^2+1$  个项所组成的实数列,求证:从中一定可以挑出由  $n+1$  个项所组成的单调子数列.

为了具体地了解这个结论说的是什么内容,在证明之前,我们来看几个特殊的情况.当  $n=1$  时,  $n^2+1=2$ ,  $n+1=2$ , 这就是说:任意给定两个项组成的实数列,从中一定可以取出由两个项组成的单调子数列.这是不证自明的,因为任何两个实数所组成的数列一定是单调数列.当  $n=2$  时,  $n^2+1=5$ ,  $n+1=3$ , 这就是说:任意给定由五个项组成的数列,从中一定可以取出有三个数组成的单调子数列.即使在这种  $n$  相当小的情形,结论的正确性已经不是显而易见的了.

**证明** 把原数列记为

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, a_{n^2+1}.$$

将以  $a_i$  作为首项的,项数最多的下降数列的项数记为  $N_i$ .由于单单是一个  $a_i$  就可组成一个下降子数列,所以  $N_i \geq 1$ . 这就是说,  $N_1, N_2, \cdots, N_{n^2+1}$  是  $n^2+1$  个正整数.如果其中某一个大于或等于  $n+1$ , 那么结论就已经成立了,因为我们这时即可找出一个含有  $n+1$  项的下降子数列.所以,只须讨论另外一种情况,即:

$$1 \leq N_i \leq n \quad (i=1, 2, \cdots, n^2+1)$$

的情况.当  $n^2+1$  个自然数  $N_i$  只呈现  $1, 2, \cdots, n$  这  $n$  种可能时,由原则二可知,它们之中至少有  $n+1$  个数相等,设为

$$N_{i_1} = N_{i_2} = \cdots = N_{i_{n+1}}, \quad (2)$$

其中足标适合

$$1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_{n+1} \leq n^2 + 1,$$

现在我们来证明：子数列

$$a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{n+1}}$$

是严格上升数列。可以用反证法。假若

$$a_{i_1} \geq a_{i_2},$$

那么，以  $a_{i_1}$  为头的，具有最大项数的下降子数列，起码要比以  $a_{i_2}$  为头的，具有最大项数的下降子数列多一个项。也就是说，应当有

$$N_{i_1} \geq N_{i_2} + 1.$$

这与等式(2)矛盾。所以，只能是  $a_{i_1} < a_{i_2}$ 。同理可证

$$a_{i_1} < a_{i_2} < a_{i_3} < \cdots < a_{i_{n+1}}.$$

这就是说：在原数列不包含由  $n+1$  个项所组成的下降子数列的情况下，我们证明了原数列一定含有由  $n+1$  个项所组成的严格上升子数列。所需的结论就完全证明了。

**[例 7]** 一个国际社团的成员来自六个国家，共有 1978 人，用 1, 2, ..., 1977, 1978 来编号。试证明：该社团至少有一个成员的编号与他的两个同胞的编号之和相等，或是其一个同胞的编号的两倍。（1978 年第二十八届国际中学生数学竞赛试题）

**证明** 本题与下列问题完全相当：“把 1, 2, 3, ..., 1977, 1978 按任意方式分成六组，则必有一组有这样的性质：其中至少有一个数，或是等于同一组中其他两数之和，或是等于另一数的两倍。”

用反证法来证明这一结论。假设任一组数都不具备上述性质，那么由此可推知，每一组中的数都具备下列性质：

同一组数中任何两数之差必不在这个组中. (\*)

这是因为, 若  $a$ ,  $b$  和  $b-a$  这三数在同一组中, 那么由等式

$$a + (b-a) = b$$

可知, 这一组数已经具备欲证的性质了.

由  $\frac{1978}{6} > 329$ , 故根据原则二, 可以肯定有一个数组  $A$ , 其中至少含 330 个数. 现从  $A$  中任意取出 330 个数来, 记其中最大的那一个数为  $m_1$ . 把  $m_1$  减去其余的 329 个数, 得到的 329 个数既是正整数又小于 1978, 而且, 由性质 (\*) 可知, 它们必不在组  $A$  中, 即应属于其余五个数组. 又由  $\frac{329}{5} > 65$ , 再根据原则二, 可以肯定有一个数组  $B$ , 其中至少含上述 329 个中的 66 个数. 再从  $B$  中任取上述 329 个数中的 66 个来, 记其中最大的那一个为  $m_2$ . 把  $m_2$  减去其余 65 个数, 得出新的 65 个数, 由性质 (\*), 它们必不属于  $B$ ; 现在指出, 这 65 个数也不会属于  $A$ , 假若其中有某一个数  $(m_2 - b)$  属于  $A$ , 因  $m_2$  与  $b$  可以写为:

$$m_2 = m_1 - a_1; \quad (a_1 \text{ 属于 } A)$$

$$b = m_1 - a_2, \quad (a_2 \text{ 属于 } A)$$

这将导致

$$a_2 - a_1 = (m_1 - a_1) - (m_1 - a_2) = m_2 - b$$

属于  $A$ , 这就同  $A$  具备性质 (\*) 的假设相违背. 这就是说, 这 65 个数必属于其余四个数组. 由  $\frac{65}{4} > 16$ , 根据原则二又可

断言, 必有一个数组  $C$  至少含有上述 65 个数中的 17 个数, 仍从  $C$  中任取上述 65 个数中的 17 个, 记其最大者为  $m_3$ . 把  $m_3$  减去其余 16 个数字, 而得出新的 16 个数; 仿照前而的推理可以证明, 它们既不属于  $C$ , 也不会属于  $B$  与  $A$ , 而只能

属于其余三个数组  $D, E, F$  之一. 由于  $\frac{16}{3} > 5$ , 根据原则二, 可以设组  $D$  中至少含有这 16 个数中的 6 个数……, 末了, 可以断言在最后一个数组  $F$  中含有两个数, 其中的大数减去小数所得之差, 一方面是不超过 1978 的正整数, 同时又不属于  $A, B, C, D, E, F$  这六个数组中的任何一个, 这显然是一个矛盾! 这个矛盾说明题目的结论是正确的, 证完.

\* \* \*

零散的例子还很多, 不再一一列举了. 从以上七个例题, 读者可以看到, 虽说“抽屉原则”容易理解, 而且解题过程中并没有用到什么高深的数学知识, 但是, 解题时需要相当灵活的技巧. 最关键的一着是“制造抽屉”, 这要求具备代数、几何、数论等方面的坚实的基础知识. 拿例 1 来说吧, 如果用正方形的两条对角线把它分成四个全等的等腰直角三角形(图 5), 把每一个直角三角形当成一个“抽屉”, 依照原则一, 虽然仍可断言五个点中必定至少有两点落在同一个三角形之上, 但是无法作出它们之间的距离不超过  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  的结论. 所以, 只有重视基础知识的学习和基本技能的训练; 牢固而且灵活地掌握代数、几何、三角知识, 才能成为制造“抽屉”的能工巧匠.

在下面的各节中, 将不断地介绍一些新鲜的数学知识 (这些知识本身也就是数学中一些最基本、最重要的内容), 然后在新的知识领域内继续运用抽屉原则, 进一步得出一些有趣的结论.

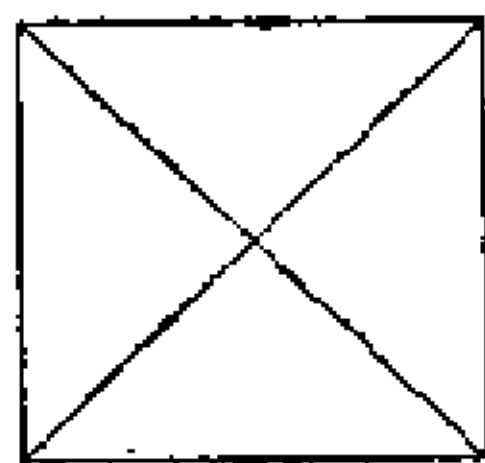


图 5



## 四、剩 余 类

先从两个具体的例子谈起.

[例 1] 在坐标平面上, 我们把两个坐标都是整数的点称为整点. 对于任意给定的五个整点, 求证其中一定有两个点, 使得其联线的中点仍为整点.

分析 两点  $(x_1, y_1)$  和  $(x_2, y_2)$  的联线的中点是  $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ . 当  $x_1, x_2$  与  $y_1, y_2$  均为整数时, 为了保证  $\frac{x_1+x_2}{2}$  和  $\frac{y_1+y_2}{2}$  均为整数, 必须而且只须  $(x_1+x_2)$  和  $(y_1+y_2)$  都是偶数, 亦即  $x_1$  和  $x_2$  以及  $y_1$  和  $y_2$  有相同的奇偶性. 因此, 这里先来讨论平面整点的两个坐标的奇偶性的各种可能的情况. 任何一个平面整点, 可归为下列四种类型之一:

(奇, 奇), (奇, 偶), (偶, 奇), (偶, 偶).

当任给五个平面整点时, 根据原则一, 一定至少有两个点属于同一类型.

证明 设五个整点中, 属于同一类型的两个整点是  $(x_1, y_1)$  和  $(x_2, y_2)$ , 这就是说:  $x_1$  和  $x_2$  以及  $y_1$  和  $y_2$  有相同的奇偶性, 所以  $x_1+x_2$  和  $y_1+y_2$  都是偶数, 亦即  $\frac{x_1+x_2}{2}$  和  $\frac{y_1+y_2}{2}$  都是整数. 这就证明了,  $(x_1, y_1)$  与  $(x_2, y_2)$  的联线的中点  $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$  仍为整点.

[例 2] 同样地, 在空间直角坐标系中, 我们把三个坐标

都是整数的点称为整点. 对于空间中任意给定的 28 个整点, 求证其中一定有两个点, 使其联线上的三等分点仍为整点.

读者一定会认为, 例 2 和例 1 是属于同一性质的问题, 因此用大致相同的方法就能加以解决. 这种看法是正确的. 不过, 再想用什么“奇数”、“偶数”来说明它, 那却是不可能的了.

为了简明地说清楚这一大类问题, 我们首先来介绍“同余”和“剩余类”的概念, 而把证明例 2 放在本节的最末.

首先介绍一个函数  $[x]$ . 设  $x$  是任一实数, 则用  $[x]$  来表示适合下列不等式的整数:

$$[x] \leq x < [x] + 1.$$

这个定义意味着以下三点:

(i)  $[x]$  是一个整数;

(ii) 整数  $[x]$  不超过  $x$ ;

(iii) 比  $[x]$  再大的整数, 哪怕是  $[x] + 1$ , 就已大于  $x$  了.

把这三条合在一起, 则是:  $[x]$  是不超过  $x$  的最大的整数. 我们称  $[x]$  为  $x$  的整数部分. 例如

$$[5] = 5,$$

$$[0.9999] = 0,$$

$$[-3.6] = -4,$$

$$[-7] = -7;$$

如果  $\pi$  表示圆周率, 那么

$$[\pi] = 3,$$

$$[-\pi] = -4.$$

函数  $[x]$  是数学中常用的一个重要函数.

现在, 设  $m$  是一个正整数,  $a$  为任一整数, 令

$$q = \left[ \frac{a}{m} \right],$$

所以, 依照定义, 有

$$q \leq \frac{a}{m} < q+1.$$

用正数  $m$  遍乘上不等式, 得到

$$mq \leq a < m(q+1).$$

再令整数

$$r = a - mq.$$

于是

$$0 \leq r < m.$$

这就是说,  $m$  为任一正整数,  $a$  为任一整数, 则必存在整数  $q$  和  $r$ , 使得

$$a = mq + r, \quad (\text{其中 } 0 \leq r < m)$$

这里,  $q$  称为  $m$  除  $a$  所得的不完全商, 而  $r$  称为  $m$  除  $a$  所得的余数. 当  $r=0$  时, 称  $m$  可以整除  $a$ , 或称  $a$  可被  $m$  所整除, 记为  $m|a$ . 例如, 当  $m=5$  时,

$$15 = 5 \times 3 + 0, \quad \text{所以 } 5|15, \text{ 余数为 } 0;$$

$$21 = 5 \times 4 + 1, \quad \text{余数为 } 1;$$

$$-21 = 5 \times (-5) + 4, \quad \text{余数为 } 4.$$

一般地说, 用正整数  $m$  去除任一整数时, 余数不外乎

$$0, 1, 2, \dots, m-1$$

这样  $m$  种情况.

设  $a, b$  是两个整数, 如果用  $m$  去除它们, 将有整数  $q_1, q_2$  及  $r_1, r_2$ , 使得

$$a = mq_1 + r_1, \quad (1)$$

$$b = mq_2 + r_2, \quad (2)$$

并且  $0 \leq r_1 < m, 0 \leq r_2 < m$ ; 当  $r_1 = r_2$  时, 称  $a$  和  $b$  关于模  $m$  同余, 用同余式

$$a \equiv b \pmod{m}$$

来表示。例如

$$15 \equiv 0 \pmod{5},$$

$$14 \equiv 9 \pmod{5},$$

$$18 \equiv -6 \pmod{8},$$

等等。关于模  $m$  同余，还可以用另一方式来刻划，这就是： $a \equiv b \pmod{m}$  的必要充分条件是  $m \mid (b-a)$ 。关于这一性质，可以证明如下：

先证必要性。当(1)和(2)中的  $r_1 = r_2$  时，有

$$\begin{aligned} b-a &= (mq_2 + r_2) - (mq_1 + r_1) = mq_2 - mq_1 \\ &= m(q_2 - q_1), \end{aligned}$$

由于  $q_2 - q_1$  是整数，所以  $m \mid (b-a)$ 。

再证充分性。设  $m \mid (b-a)$ ，故有整数  $q$ ，使得  $b-a = mq$ ，亦即  $b = a + mq$ ，由于(1)，便有

$$b = a + mq = mq_1 + mq + r_1 = m(q_1 + q) + r_1,$$

因为  $q_1 + q$  为整数，故上式表明：用  $m$  去除  $b$  时余数也是  $r_1$ ，所以  $b$  和  $a$  关于模  $m$  是同余的。

以一个任意固定的正整数  $m$  为模，可以把全体整数按照余数来分类：凡用  $m$  来除有相同余数的整数都归为一类。这样，便可把全体整数分成  $m$  个类：

$$\{0\}, \{1\}, \{2\}, \dots, \{m-1\},$$

第一类中包含能被  $m$  除尽的全部整数，第二类中包含被  $m$  除余 1 的全部整数，如此等等。这  $m$  个类称为关于模  $m$  的剩余类。再强调一次：关于模  $m$  的剩余类只有  $m$  个。

剩余类的概念，在日常生活中，是见得很多的：用 2 作模，可把所有整数分为两大类，这就是通常人们所说的双数和单数；用 7 作模，就把无穷尽的日子分成了七大类，即：星期

日, 星期一, …… , 星期六, 人们按照这一分类来安排学习、劳动和休息.

[例 3] 任意给定正整数  $m$ , 求证: 一定有  $m$  的某一个整倍数, 它完全由 0 和 1 两个数字所组成.

证明 考察正整数列:

$$1, 11, 111, 1111, \dots, \underbrace{111\dots 1}_{m+1 \text{ 个}}.$$

我们把它们归入关于模  $m$  的剩余类中. 前已指出, 关于模  $m$  的剩余类只有  $m$  个, 而上述  $m+1$  个数归入  $m$  个剩余类时, 依照原则一, 其中一定至少有两个数, 例如说  $a$  和  $b$  (不妨设  $a < b$ ), 属于同一剩余类, 即  $a \equiv b \pmod{m}$ . 这就是说,  $b-a$  是  $m$  的一个整倍数. 另一方面, 根据  $a$  和  $b$  的构成可知,  $b-a$  具有下列形式:

$$11\dots 100\dots 0,$$

这就是我们要证的结论.

[例 4] 设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是  $n$  个任意给定的整数. 求证: 其中一定可以找到紧连在一起的若干个数, 使得它们的和可被  $n$  整除.

证明 考察数列:

$$a_1, a_1+a_2, a_1+a_2+a_3, \dots, a_1+a_2+a_3+\dots+a_n. \quad (3)$$

若这  $n$  个整数中至少有一个能被  $n$  所整除, 那么结论就不证自明了. 所以, 设上述数列中没有一个是  $n$  的整倍数. 于是, 当我们把它们分到关于模  $n$  的剩余类中去的时候, 它们只能进入以下  $n-1$  个类:

$$\{1\}, \{2\}, \dots, \{n-1\}.$$

可是数列 (3) 中有  $n$  个整数, 按照原则一, 数列 (3) 中至少有两个数  $a_1+\dots+a_k$  和  $a_1+\dots+a_k+\dots+a_l$  属于同一类 ( $l > k$ ), 即



$$(a_1 + \cdots + a_k + \cdots + a_l) - (a_1 + \cdots + a_k) = a_{k+1} + \cdots + a_l$$

可被  $n$  整除, 这正是我们想要证明的结论.

现在回头来解答本节的例 2.

**例 2 的证明.** 以 3 为模, 可将全体整数分为三个剩余类. 因此, 一切空间整点  $(x, y, z)$ , 可以按照其每一个坐标所属的剩余类的三种情况, 划分为  $3 \times 3 \times 3 = 27$  类. 任给 28 个空间整点, 按照原则一, 应至少有两点——记为  $(x_1, y_1, z_1)$  和  $(x_2, y_2, z_2)$ ——属于同一类中, 这就是说

$$x_1 \equiv x_2 \pmod{3},$$

$$y_1 \equiv y_2 \pmod{3},$$

$$z_1 \equiv z_2 \pmod{3},$$

或者说, 三个数

$$x_2 - x_1, \quad y_2 - y_1, \quad z_2 - z_1$$

都可被 3 整除. 由解析几何可知: 将  $(x_1, y_1, z_1)$  和  $(x_2, y_2, z_2)$  的连线三等分的两个分点是

$$\begin{aligned} & (x_1, y_1, z_1) + \frac{1}{3}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \\ &= \left( x_1 + \frac{x_2 - x_1}{3}, y_1 + \frac{y_2 - y_1}{3}, z_1 + \frac{z_2 - z_1}{3} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (x_1, y_1, z_1) + \frac{2}{3}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \\ &= \left( x_1 + 2 \cdot \frac{x_2 - x_1}{3}, y_1 + 2 \cdot \frac{y_2 - y_1}{3}, z_1 + 2 \cdot \frac{z_2 - z_1}{3} \right). \end{aligned}$$

显然, 它们的各个坐标都是整数, 因此这两个点都是整点.

本例证明中的基本方法, 在第七节定理三的证明中还要采用.

同余关系具有以下一些基本性质.

1.  $a \equiv a \pmod{m}$  (反身性).

2. 若  $a \equiv b \pmod{m}$ , 则  $b \equiv a \pmod{m}$  (对称性),

3. 若  $a \equiv b \pmod{m}$ ,  $b \equiv c \pmod{m}$ , 则  $a \equiv c \pmod{m}$  (传递性).

上述三条性质的证明, 请读者自行完成.

4. 若  $a \equiv \alpha \pmod{m}$ ,  $b \equiv \beta \pmod{m}$ , 则

$$a + b \equiv \alpha + \beta \pmod{m};$$

$$ab \equiv \alpha\beta \pmod{m}.$$

这就是说, 同余式也象等式一样, 可以两边相加或相乘.

**证明** 因为  $a \equiv \alpha \pmod{m}$  和  $b \equiv \beta \pmod{m}$ , 故存在整数  $s$  和  $t$ , 使得

$$a = \alpha + sm, \quad b = \beta + tm.$$

于是

$$a + b = \alpha + \beta + sm + tm = \alpha + \beta + (s + t)m,$$

这正表明

$$a + b \equiv \alpha + \beta \pmod{m};$$

此外, 还有

$$\begin{aligned} ab &= (\alpha + sm)(\beta + tm) = \alpha\beta + at m + \beta s m + st m^2 \\ &= \alpha\beta + (at + \beta s + stm)m, \end{aligned}$$

这里  $at + \beta s + stm$  是一整数, 故知

$$ab \equiv \alpha\beta \pmod{m}.$$

## 五、有理数和无理数

通过小学和中学里的数学学习, 大家对有理数的运算应当是很熟悉的了. 所谓有理数, 是指那些能够写成两个整数之商的数. 也就是说, 当  $m, n$  为整数, 且  $m \neq 0$  时, 形如  $\frac{n}{m}$

的数叫做有理数.

整数是有理数的特例. 因为, 设  $n$  为任一整数, 由等式  $n = \frac{n}{1}$  可知, 整数也可以看成是有理数.

设  $\frac{n}{m}$  和  $\frac{n'}{m'}$  是两个有理数, 于是由下列等式

$$\frac{n}{m} \pm \frac{n'}{m'} = \frac{nm' \pm mn'}{mm'},$$

$$\frac{n}{m} \cdot \frac{n'}{m'} = \frac{nn'}{mm'},$$

$$\frac{n}{m} \div \frac{n'}{m'} = \frac{nm'}{mn'} \quad (\text{这里还应设 } n' \neq 0)$$

可知, 有理数的和、差、积、商还是有理数. 换句话说, 在全体有理数范围内, 进行加、减、乘、除四则运算, 其结果仍不会超出有理数的范围(当然, 在作除法的时候, 不允许用零作除数). 这个性质, 叫做有理数系统对于四则运算的封闭性.

特别, 设  $a$  和  $b$  是两个有理数, 那么可以推知  $\frac{1}{2}(a+b)$  也是有理数. 要是  $a \neq b$  时, 把  $a$  和  $b$  画在数轴上就是不同的两个点,  $\frac{1}{2}(a+b)$  就是这两点联线上的中点. 由此可见, 两个不同的有理数的中点必定是一个有理数. 反复地进行这种推理, 就可发现: 在两个不同的有理数之间, 有着无穷多个不同的有理数.

具体来说, 线段  $[0, 1]$  的两个端点是有理数, 它的中点  $\frac{1}{2}$  是一个有理数; 接着再看两条线段  $[0, \frac{1}{2}]$  和  $[\frac{1}{2}, 1]$ , 它们各自的中点  $\frac{1}{4}$  和  $\frac{3}{4}$  都是有理数; 考察四条更短的线段:

$[0, \frac{1}{4}]$ ,  $[\frac{1}{4}, \frac{2}{4}]$ ,  $[\frac{2}{4}, \frac{3}{4}]$ ,  $[\frac{3}{4}, 1]$ , 它们各自的中点  $\frac{1}{8}$ ,  $\frac{3}{8}$ ,  $\frac{5}{8}$ ,  $\frac{7}{8}$  也是有理数, …… , 如此等等. 一般地, 对于任何自然数  $n$ , 数列

$$0, \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \frac{3}{2^n}, \dots, \frac{2^n-1}{2^n}, 1$$

是线段  $[0, 1]$  上等距离分布的一组有理数, 它们相邻两个数之间的距离是  $\frac{1}{2^n}$ . 只要把正整数  $n$  取得充分地大, 就能使这个距离变得任意地小. 由此可以推知, 在线段  $[0, 1]$  之内的随便哪个地方, 不论画一条多么短的线段, 在这线段之内必然包含着有理数, 而且是包含着无穷无尽的有理数. 我们把这个性质说成是: 有理数在线段  $[0, 1]$  上是处处稠密的.

设  $m$  为任一给定的整数, 于是将  $[0, 1]$  中的任何有理数  $r$  平移  $m$  个单位之后, 得到  $r+m$ , 它就成了线段  $[m, m+1]$  上的一个有理数. 这就表明: 线段  $[m, m+1]$  中有理数分布的“密度”决不会低于线段  $[0, 1]$  中有理数的“密度”. 由于上述整数  $m$  可取为  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ , 故可推出, 不论在数轴上的哪一个地方画一条多么小的线段, 这线段中必定包含着无穷无尽的有理数! 这就是有理数在整个数轴上的稠密性.

有理数的稠密性, 可以通俗地说成: 有理数在数轴上“无处不在”. 虽然如此, 但整个数轴绝不是有理数的“一统天下”.

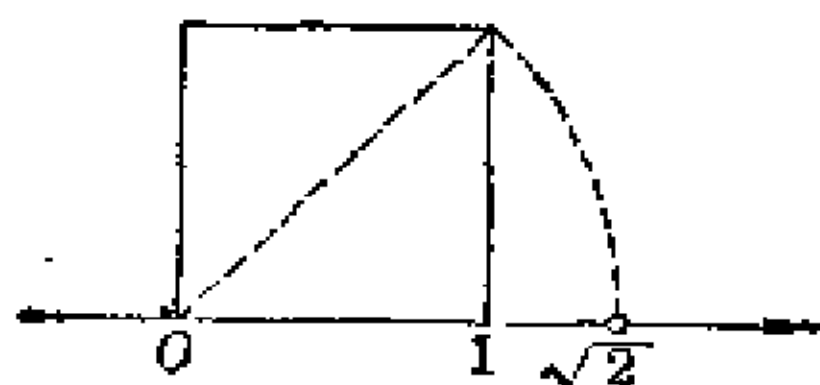


图 6

数轴上还有许许多多的不能用有理数来表示的点. 最简单的例子是: 边长为 1 的正方形的对角线的长度——用符号  $\sqrt{2}$  来记——不是有理数(图 6).

**证明** 用反证法来证明上述结论. 假若  $\sqrt{2}$  是有理数, 于是有整数  $m$  和  $n$ , 使得

$$\sqrt{2} = \frac{n}{m}, \quad (m \neq 0)$$

并且, 不妨设  $m$  和  $n$  已不含 2 作为公因数. 由勾股定理, 得

$$\left(\frac{n}{m}\right)^2 = 1^2 + 1^2 = 2,$$

即  $n^2 = 2m^2$ . 由于  $2m^2$  为偶数, 即  $n^2$  为偶数, 于是  $n$  只能是偶数 (因为奇数的平方永远是奇数). 设  $n = 2p$ , 其中  $p$  为整数. 从  $(2p)^2 = 2m^2$ , 又可得出  $2p^2 = m^2$ , 进而推得  $m$  也是一个偶数.  $m$  和  $n$  都是偶数, 这就与  $m$  和  $n$  不含公因数 2 矛盾! 这个矛盾说明  $\sqrt{2}$  决不能是有理数.

用类似的办法, 可以证明:  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{5}$ ,  $\sqrt{7}$  ... 都不是有理数. 更一般地, 我们可以证明

**定理一** 如果正整数  $d$  不是某一个整数的平方, 那么  $\sqrt{d}$  就一定不是有理数.

**证明** 仍旧用反证法来证明. 假若  $\sqrt{d}$  是有理数, 即有正整数  $m$  和  $n$ , 使得  $\sqrt{d} = \frac{n}{m}$ . 不妨设  $m$  和  $n$  已经约去了任何大于 1 的公因数. 由此可得  $n^2 = m^2 d$ . 设  $d$  的标准素因子分解式为

$$d = p_1^{l_1} p_2^{l_2} \cdots p_k^{l_k},$$

其中  $p_1, p_2, \dots, p_k$  是  $d$  的全部互不相同的素因子,  $l_1, l_2, \dots, l_k$  是一些正整数. 由于  $d$  不是整数的平方, 故  $l_1, l_2, \dots, l_k$  中至少有一个是奇数. 为确定起见, 设  $l_1$  是一个奇数. 由等式

$$n^2 = m^2 p_1^{l_1} \cdots p_k^{l_k}$$

可知, 必须有  $p_1 | n$ . 设  $n = p_1^s \cdot t$ , 其中  $t$  已不能被  $p_1$  整除. 由



此得到

$$p_1^{2s}t^2 = m^2 p_1^{l_1} \cdots p_k^{l_k}.$$

由于  $2s \geq l_1$ ,  $l_1$  又为奇数, 实际上是  $2s > l_1$ . 即有:

$$p_1^{2s-l_1}t^2 = m^2 p_2^{l_2} \cdots p_k^{l_k},$$

由此又可推知, 必须有  $p_1 | m$ , 从而  $m$  和  $n$  具有素公约数  $p_1$ , 这是一个矛盾. 这个矛盾表明, 假设  $\sqrt{d}$  为有理数是不合理的. 证完.

这样一来, 我们已经证明了一大批非有理数的存在性. 数轴上的非有理数, 称之为无理数.

前已证明  $\sqrt{2}$  为无理数. 于是, 对任何有理数  $r$ , 数  $r + \sqrt{2}$  一定是无理数. 这是因为, 若  $r + \sqrt{2}$  是有理数, 根据有理数系统对减法的封闭性, 将得出  $\sqrt{2} = (r + \sqrt{2}) - r$  为有理数, 这是不可能的. 这就是说: 将每一个有理点在数轴上向右平移同一距离  $\sqrt{2}$ , 将得出一批无理点. 由此可以作出以下两个推论:

(i) 数轴上全体无理数的“数目”, 决不少于全体有理数的“数目”;

(ii) 数轴上无理数的密集程度决不次于有理数的密集程度. 特别可知, 数轴上无理数的全体也是处处稠密的.

现在, 我们来证明一个刻划有理数的特性的定理.

**定理二** 任何一个有理数, 一定能表示成十进有穷小数或十进无穷循环小数; 反之, 任一有穷小数或无穷循环小数, 一定是有理数.

**证明** 显然, 我们只须讨论正有理数的情形就可以了.

(1) 对于任意给出的一个正有理数  $\frac{m}{n}$  (其中  $m, n$  均为正整数), 在用  $m$  去除  $n$  的过程中, 如果经过有穷次计算正好除

尽, 那么  $\frac{n}{m}$  就化成了有穷十进小数.

如果任何有穷次计算仍不能除尽, 那么, 在商过  $\left[\frac{n}{m}\right]$  之后, 以后每除一次的余数无非是:  $1, 2, 3, \dots, m-1$  这样有限种可能的情况. 由原则一, 充其量作过  $m$  次除法之后, 必会重复出现同一个余数, 在这种情形下, 进一步的计算便将重复前面已进行过的过程, 这时就化得了十进无穷循环小数.

(ii) 十进有穷小数显然是有理数. 因此只须证明: 十进无穷循环小数也是一个有理数. 事实上,

$$\begin{aligned} & a_0.a_1a_2\cdots a_nb_1b_2\cdots b_sb_1b_2\cdots b_sb_1b_2\cdots b_s \\ &= a_0.a_1a_2\cdots a_n + \frac{1}{10^{n+s}} \left( \frac{b_1\cdots b_s}{10^s} + \frac{b_1\cdots b_s}{10^{2s}} + \cdots \right) \\ &= a_0.a_1a_2\cdots a_n + \frac{b_1b_2\cdots b_s}{10^{n+s}} \left( 1 + \frac{1}{10^s} + \frac{1}{10^{2s}} + \cdots \right) \\ &= a_0.a_1a_2\cdots a_n + \frac{b_1b_2\cdots b_s}{10^{n+s}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10^s}} \\ &= a_0.a_1a_2\cdots a_n + \frac{b_1b_2\cdots b_s}{10^n} \cdot \frac{1}{10^s - 1}, \end{aligned}$$

这显然是一个有理数, 证完.

由定理二可以推知无理数的一个特征: 无理数就是那些能而且只能表示为十进无穷不循环小数的数.

有理数的全体和无理数的全体组成实数系统. 实数系统可以和整个数轴上的点之间建立一一对应.

最后, 建立一个关于用有理数来逼近实数的定理.

用有理数去逼近实数的可能性, 可以很容易地由有理数在数轴上的稠密性推出. 任给一个实数  $\alpha$  和一个不论多么小的正数  $\epsilon$ , 以  $\alpha$  为中点, 在数轴上画出线段  $(\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon)$ , 有理数的稠密性断言, 在这个小线段里有无穷多个有理数, 它们

中间的任何一个, 同  $\alpha$  的距离当然小于事先给定的很小的正数  $\varepsilon$ .

下面的定理三及其证明过程, 提供了具体找出这些有理数的途径. 它的更深一层的意思, 在证明完毕之后再来说.

我们先来证明一个引理.

**引理** 设  $x_0, x_1, \dots, x_n$  是适合不等式

$$0 \leq x_i < 1 \quad (i=0, 1, 2, \dots, n)$$

的  $n+1$  个实数, 则其中必有两个数  $x_k$  和  $x_l$  适合

$$|x_k - x_l| < \frac{1}{n}.$$

**证明** 把区间  $[0, 1)$  分成下列  $n$  个小区间

$$\left[0, \frac{1}{n}\right), \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right), \dots, \left[\frac{n-1}{n}, 1\right),$$

它们两两无公共点,  $[0, 1)$  中的  $n+1$  个点  $x_0, x_1, \dots, x_n$  中, 按照原则一, 必至少有两个点——设为  $x_k$  和  $x_l$ ——属于同一小区间, 显而易见

$$|x_k - x_l| < \frac{1}{n}.$$

**定理三** 设  $\alpha$  为任一实数,  $n$  为任意给定的正整数, 则有一对整数  $a, b$ , 使得

$$\left|a - \frac{b}{n}\right| < \frac{1}{na};$$

并且, 其中的  $a$  还适合条件:  $0 < a \leq n$ .

**证明** 令  $m_i = [i\alpha]$ ,  $i=0, 1, \dots, n$ , 于是有

$$m_i \leq i\alpha < m_i + 1,$$

或者

$$0 \leq i\alpha - m_i < 1. \quad (i=0, 1, \dots, n)$$

把  $i\alpha - m_i$  当成引理中的  $x_i$ , 于是, 有足标  $k$  和  $l$ , 适合  $0 \leq k < l \leq n$ , 并使得

$$|(l\alpha - m_l) - (k\alpha - m_k)| < \frac{1}{n},$$

即

$$|(l-k)\alpha - (m_l - m_k)| < \frac{1}{n}.$$

置  $a = l - k$ ,  $b = m_l - m_k$ , 它们都是整数, 并且  $0 < a = l - k \leq l \leq n$ , 还使得

$$|a\alpha - b| < \frac{1}{n}.$$

用正数  $a$  去除上式的两边, 这就证得了:

$$\left| \alpha - \frac{b}{a} \right| < \frac{1}{na}.$$

由于  $a \geq 1$ , 故有  $\left| \alpha - \frac{b}{a} \right| < \frac{1}{n}$ , 我们可以把  $n$  取得充分大, 以使  $\frac{1}{n}$  足够小; 不等式  $a \leq n$  表明, 可以控制有理数  $\frac{b}{a}$  的分母不致过大. 从这两个意义上来说, 我们已经实现了用比较简单的分数来比较精确地逼近一个实数.

## 六、不定方程

从一个具体的例子谈起.

“百钱买百鸡”是我国古代《张丘建算经》中的名题. 用现代汉语叙述乃是:

[例 1] 小鸡一元钱三只, 母鸡三元钱一只, 公鸡五元钱一只. 用一百元钱去买一百只鸡, 问小鸡、母鸡、公鸡各买几只?

解 用  $x$ 、 $y$ 、 $z$  分别代表小鸡、母鸡、公鸡的只数, 根据题设条件, 容易写出下面两个方程式

$$x+y+z=100, \quad (1)$$

$$\frac{1}{3}x+3y+5z=100, \quad (2)$$

在这里,未知数的数目比方程式的数目多1. 这里,我们是要寻求它们的非负整数解,而不是一般的解.

用3去乘(2)式的两边,从所得结果中减去(1)式,得

$$8y+14z=200,$$

这也就是

$$4y+7z=100, \quad (3)$$

这样就消去了一个未知量  $x$ . 由(3)式可以得出

$$7z=4(25-y). \quad (4)$$

由(4)式可见  $7|4(25-y)$ . 但是,7为素数,且除不尽4,故有  $7|(25-y)$ . 即有整数  $t$ , 使  $25-y=7t$ . 这样一来,应有

$$y=25-7t,$$

$$z=4t,$$

我们需要的是非负整数解,故必须  $0 \leq t < \frac{25}{7}$ , 即  $t$  只能取如下四个整数值: 0, 1, 2, 3, 对应的四组解是

$t$	$x$	$y$	$z$
0	75	25	0
1	78	18	4
2	81	11	8
3	84	4	12

“百钱买百鸡”提供了所谓不定方程的比较简单例子. 不定方程乃是指未知数的数目多于方程的数目, 而且未知数

须受某种限制(如整数, 正整数或有理数等)的方程. 关于不定方程, 在我国古代有过丰富的研究, “百钱买百鸡”仅是这种研究成果之一例.

[例 2] 证明: 方程

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz \quad (5)$$

除  $x=y=z=0$  而外, 无其他整数解.

**证明** 若三整数  $x, y, z$  适合方程(5). 这时, (5)式的右边为偶数, 从而  $x^2 + y^2 + z^2$  也为偶数; 这样, 就立即排除了  $x, y, z$  三个都是奇数, 以及其中是两偶一奇的情况. 这是因为, 在这两种情况下,  $x^2 + y^2 + z^2$  显然都是奇数. 我们说: 两奇一偶的情况也不能出现. 这是因为, 假设  $x=2k, y=2m+1, z=2n+1$ , 其中  $k, m$  和  $n$  都是整数, 于是

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4k^2 + 4m^2 + 4n^2 + 4m + 4n + 1 + 1,$$

从而

$$x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2 \pmod{4}.$$

可是, (5)式的右边

$$2xyz \equiv 4kyz \equiv 0 \pmod{4},$$

于是(5)式自然不能成立了. 这就是说, 只须考察  $x, y, z$  都是偶数的情况. 设

$$x=2x_1, \quad y=2y_1, \quad z=2z_1, \quad (6)$$

其中  $x_1, y_1, z_1$  都是整数. 将(6)式代入(5)式, 并化简, 得

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 4x_1y_1z_1. \quad (7)$$

重复同样的推理过程, 可以说明  $x_1, y_1, z_1$  都是偶数, 设

$$x_1=2x_2, \quad y_1=2y_2, \quad z_1=2z_2, \quad (8)$$

其中  $x_2, y_2, z_2$  均为整数. 将(8)式代入(7)式, 并化简, 得

$$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = 8x_2y_2z_2,$$

.....

这种处理可以无止境地继续进行下去,这就表明:整数  $x$ 、 $y$  和  $z$  中都包含着无穷多个因子 2. 这只在  $x=y=z=0$  时才有可能.

至于  $x=y=z=0$  适合方程(5),那是明显的.

例 2 是一个最特殊、最简单的题目. 一般来说,决定一个不定方程有没有整数解,决非易事,其复杂性由所谓希尔伯特第十问题及其解决的过程可见. 1900 年,德国大数学家希尔伯特(David Hilbert)提出了著名的二十三个数学问题. 其中的第十个问题是:是不是可以设计一种算法,一种计算的步骤,来决定一个任意指定的整系数的多项式方程是否具有整数解? 问题的回答是否定的,这个答案是经过了很长一段时间才获得的. 它是积累了美国数学家鲁宾逊(1952)、戴维斯(1953)、普特曼(1961)和年青的苏联数学家马蒂加斯维克(1970)等人努力的结果. 据报道,在证明的过程中,在技巧上巧妙地使用了“孙子定理”(又称中国剩余定理)、“斐波那契数”和“佩尔方程”的一些理论.

下一节,我们正好要来讨论佩尔(Pell)方程. 佩尔方程是一种特殊类型的二元二次不定方程,在讨论它的过程中,我们反复地用到了抽屉原则.

## 七、佩尔方程

考察不定方程

$$x^2 - dy^2 = 1, \quad (1)$$

其中  $d$  为正整数. 如果  $d$  是某一整数  $p$  的平方,即  $d=p^2$ , 则方程(1)可以写为

$$(x-py)(x+py)=1. \quad (2)$$

当  $x, y$  为方程 (1) 的整数解时,  $x-py$  和  $x+py$  都是整数, 故由 (2) 式推出

$$\begin{cases} x-py=1, \\ x+py=1, \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} x-py=-1, \\ x+py=-1. \end{cases}$$

由此推得

$$\begin{cases} x=1, \\ y=0, \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} x=-1, \\ y=0. \end{cases}$$

所以, 当  $d$  是一平方数时, 方程 (1) 只有整数解  $(1, 0)$  和  $(-1, 0)$ .

在  $d$  不等于某一自然数的平方的条件下, 方程 (1) 称为佩尔方程. 读者自然要问, 佩尔方程除了显然的解  $(1, 0)$  和  $(-1, 0)$  之外, 还有没有其他的整数解?

答案是肯定的.

本节通过初等但冗长的计算和推理, 证明佩尔方程有无穷多整数解, 并求出它的全部整数解的表达式.

**定理一** 当  $d$  不是某一自然数的平方数时, 有无穷多对整数  $(x_i, y_i)$ , 适合

$$|x_i^2 - dy_i^2| < 2\sqrt{d} + 1, \quad (i=1, 2, 3, \dots)$$

**证明** 首先, 由于  $d$  是一个非平方的整数, 由第五节的定理一得知,  $\sqrt{d}$  是一个无理数. 依第五节的定理三, 对于任意给定的自然数  $n_1$ , 有一对整数  $(x_1, y_1)$ , 使

$$|x_1 - \sqrt{d} y_1| < \frac{1}{n_1},$$

其中  $1 \leq y_1 \leq n_1$ . 因此

$$\begin{aligned} |x_1^2 - dy_1^2| &= |x_1 - \sqrt{d} y_1| \cdot |x_1 + \sqrt{d} y_1| \\ &< \frac{1}{n_1} |x_1 + \sqrt{d} y_1| \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n_1} |(x_1 - \sqrt{d}y_1) + 2\sqrt{d}y_1| \\
&\leq \frac{1}{n_1} (|x_1 - \sqrt{d}y_1| + 2\sqrt{d}y_1) < \frac{1}{n_1} \left( \frac{1}{n_1} + 2\sqrt{d}y_1 \right) \\
&= \frac{1}{n_1^2} + 2\sqrt{d} \frac{y_1}{n_1} \leq 1 + 2\sqrt{d}.
\end{aligned}$$

由于  $\sqrt{d}$  为无理数,  $x_1 - \sqrt{d}y_1 \neq 0$ , 所以

$$|x_1 - \sqrt{d}y_1| > 0,$$

可取自然数  $n_2$  适当大, 使得

$$\frac{1}{n_2} < |x_1 - \sqrt{d}y_1|, \quad (3)$$

对于这个  $n_2$ , 又依第五节的定理三, 可求得一对整数  $(x_2, y_2)$ , 使

$$|x_2 - \sqrt{d}y_2| < \frac{1}{n_2}, \quad (4)$$

其中  $1 \leq y_2 \leq n_2$ . 仿前, 仍可推出

$$|x_2^2 - dy_2^2| < 2\sqrt{d} + 1.$$

由(3)式和(4)式, 知

$$|x_1 - \sqrt{d}y_1| > |x_2 - \sqrt{d}y_2|.$$

续行此法以至无穷, 可知有  $(x_i, y_i)$ , 使得:

$$|x_i^2 - dy_i^2| < 2\sqrt{d} + 1, \quad (i=1, 2, 3, \dots)$$

其中  $y_i \geq 1$ . 并且, 还有

$$|x_1 - \sqrt{d}y_1| > |x_2 - \sqrt{d}y_2| > |x_3 - \sqrt{d}y_3| > \dots \quad (5)$$

由(5)式可见, 只要  $i \neq j$ , 就有

$$(x_i, y_i) \neq (x_j, y_j).$$

这就是说, 适合条件的整数对  $(x_i, y_i)$ ,  $i=1, 2, 3, \dots$ , 确有无穷多, 证完.

**定理二** 存在一个非零的整数  $k$ , 使不定方程

$$x^2 - dy^2 = k \quad (6)$$

有无穷多整数解.

**证明** 由定理一得知, 有无穷多对整数  $(x_i, y_i)$  适合不等式

$$-(2\sqrt{d}+1) < x_i^2 - dy_i^2 < 2\sqrt{d}+1, \quad (i=1, 2, 3, \dots)$$

但是, 在  $-(2\sqrt{d}+1)$  与  $2\sqrt{d}+1$  之间, 只隔着有穷个整数, 依原则三, 在整数列

$$x_1^2 - dy_1^2, \quad x_2^2 - dy_2^2, \quad x_3^2 - dy_3^2, \dots$$

中, 必有无穷项实际上是同一个整数, 我们用  $k$  来记它.  $k$  是一定不会等于零的, 这是因为, 假若  $k=0$ , 将得出  $\sqrt{d}$  为有理数. 正是这个  $k$  值, 使得方程 (6) 有无穷多解, 证完.

**定理三** 佩尔方程 (1) 除了显然解  $(\pm 1, 0)$  之外, 还有其他整数解.

**证明** 如果  $(x, y)$  是方程 (6) 的解, 显然  $(|x|, |y|)$  也是方程 (6) 的解. 所以, 定理二实际上可以说成: 存在无穷多对正整数  $(\xi_l, \eta_l)$  和非零整数  $k$ , 使

$$\xi_l^2 - d\eta_l^2 = k, \quad (l=1, 2, \dots)$$

遵照证明第四节例 2 时采用过的办法, 把整数对  $(x, y)$  按其各个坐标关于模  $|k|$  的剩余分类, 可把全部整数对分成  $|k| \times |k| = k^2$  个互不相交的集合. 无穷多个正整数对  $(\xi_l, \eta_l)$  被分配在有限个集合之中, 依抽屉原则三, 一定至少有两对不同的正整数, 如  $(\xi_i, \eta_i)$  和  $(\xi_j, \eta_j)$ , 属于同一集合, 即有

$$\left. \begin{aligned} \xi_i &\equiv \xi_j \pmod{|k|}, \\ \eta_i &\equiv \eta_j \pmod{|k|} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

同时成立. 这时

$$\begin{aligned} k^2 &= (\xi_i^2 - d\eta_i^2)(\xi_j^2 - d\eta_j^2) \\ &= (\xi_i\xi_j - d\eta_i\eta_j)^2 - d(\xi_i\eta_j - \xi_j\eta_i)^2. \end{aligned}$$

由于  $k \neq 0$ , 即得

$$\left(\frac{\xi_i \xi_j - d\eta_i \eta_j}{k}\right)^2 - d\left(\frac{\xi_i \eta_j - \xi_j \eta_i}{k}\right)^2 = 1. \quad (8)$$

下面来证明两件事

(i)  $\frac{\xi_i \xi_j - d\eta_i \eta_j}{k}$  和  $\frac{\xi_i \eta_j - \xi_j \eta_i}{k}$  都是整数;

(ii)  $\frac{\xi_i \eta_j - \xi_j \eta_i}{k} \neq 0$ .

这两件事与(8)式合在一起, 正好表明找到了佩尔方程的非显然解.

先来证(i). 利用(7)式以及第四节中提到的同余式的性质, 便可得到

$$\begin{aligned} \xi_i \xi_j - d\eta_i \eta_j &\equiv \xi_i \xi_i - d\eta_i \eta_i \equiv \xi_i^2 - d\eta_i^2 \\ &\equiv k \equiv 0 \pmod{|k|}, \end{aligned}$$

以及

$$\xi_i \eta_j - \xi_j \eta_i \equiv 0 \pmod{|k|}.$$

这样就证完了(i). 再来证(ii), 假若

$$\frac{\xi_i \eta_j - \xi_j \eta_i}{k} = 0,$$

由此得到

$$\frac{\xi_i}{\xi_j} = \frac{\eta_i}{\eta_j}.$$

用  $\lambda$  来记这个公共值, 于是有

$$\xi_i^2 - d\eta_i^2 = \lambda^2 (\xi_j^2 - d\eta_j^2),$$

此即  $k = \lambda^2 k$ . 由于  $k \neq 0$ , 故  $\lambda^2 = 1$ , 从而  $\lambda = \pm 1$ . 但因  $\xi_i, \xi_j$  均为正数, 只能是  $\lambda = 1$ , 由此得  $\xi_i = \xi_j$  和  $\eta_i = \eta_j$ , 这与  $(\xi_i, \eta_i)$  和  $(\xi_j, \eta_j)$  是两对不同的正整数的事实相矛盾. 这样就证完了(ii).

注意到(8)式, 即知我们已经获得了佩尔方程的异于

$(\pm 1, 0)$  的整数解. 定理三到此证毕.

下面求佩尔方程通解的表示法.

**定理四** 若  $(x_1, y_1)$  和  $(x_2, y_2)$  都是佩尔方程 (1) 的整数解, 那么, 由等式

$$x_3 + y_3\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})(x_2 + y_2\sqrt{d}) \quad (9)$$

所确定的整数对  $(x_3, y_3)$  也是方程 (1) 的整数解.

**证明** 事实上, 由 (9) 可得

$$x_3 = x_1x_2 + dy_1y_2,$$

$$y_3 = x_1y_2 + x_2y_1.$$

所以有

$$x_3 - y_3\sqrt{d} = (x_1 - y_1\sqrt{d})(x_2 - y_2\sqrt{d}). \quad (10)$$

由 (9) 式和 (10) 式, 可得

$$\begin{aligned} x_3^2 - dy_3^2 &= (x_3 + y_3\sqrt{d})(x_3 - y_3\sqrt{d}) \\ &= (x_1 + y_1\sqrt{d})(x_1 - y_1\sqrt{d}) \\ &\quad \times (x_2 + y_2\sqrt{d})(x_2 - y_2\sqrt{d}) \\ &= (x_1^2 - dy_1^2)(x_2^2 - dy_2^2) = 1 \times 1 = 1. \end{aligned}$$

这就证得了  $(x_3, y_3)$  也是佩尔方程 (1) 的整数解, 证毕.

如果  $(x, y)$  是佩尔方程 (1) 的整数解, 并且  $x > 0, y > 0$ , 则称  $(x, y)$  是方程 (1) 的正解. 设  $(x_0, y_0)$  是一切正解  $(x, y)$  中使得数  $x + y\sqrt{d}$  为最小的那个正解, 我们有

**定理五** 佩尔方程的全部正解  $(x, y)$  中的  $x$  和  $y$ , 由公式

$$x + y\sqrt{d} = (x_0 + y_0\sqrt{d})^n \quad (11)$$

确定 (其中  $n = 1, 2, 3, \dots$ ).

**证明** 因为  $(x_0, y_0)$  是方程 (1) 的一个正解, 反复运用定理四, 便可知由公式 (11) 确定的  $(x, y)$  是方程 (1) 的正解.

反过来, 设  $(x, y)$  是方程 (1) 的任何一个正解. 因为

$x_0 \geq 1, y_0 \geq 1$ , 所以  $x_0 + y_0 \sqrt{d} > x_0 \geq 1$ , 从而数列

$$x_0 + y_0 \sqrt{d}, (x_0 + y_0 \sqrt{d})^2, (x_0 + y_0 \sqrt{d})^3, \dots \quad (12)$$

严格上升而趋向于正无穷大. 现在, 由于

$$x + y \sqrt{d} \geq x_0 + y_0 \sqrt{d},$$

可知  $x + y \sqrt{d}$  一定会夹在数列(12)中的某两项之间, 亦即有一自然数  $n$ , 使得

$$(x_0 + y_0 \sqrt{d})^n \leq x + y \sqrt{d} < (x_0 + y_0 \sqrt{d})^{n+1},$$

也就是

$$1 \leq \frac{x + y \sqrt{d}}{(x_0 + y_0 \sqrt{d})^n} < x_0 + y_0 \sqrt{d}. \quad (13)$$

将上式中间那一项改写为

$$\begin{aligned} & (x + y \sqrt{d}) [(x_0 + y_0 \sqrt{d})^{-1}]^n \\ &= (x + y \sqrt{d}) (x_0 - y_0 \sqrt{d})^n, \end{aligned}$$

并记之为  $x' + y' \sqrt{d}$ . 由于  $(x_0, -y_0)$  和  $(x, y)$  是方程(1)的整数解, 反复运用定理四, 可以得知  $(x', y')$  也是方程(1)的整数解. 在新的记号下, (13)式就是

$$1 \leq x' + y' \sqrt{d} < x_0 + y_0 \sqrt{d}. \quad (14)$$

在(14)式中, 取倒数, 得

$$0 < x_0 - y_0 \sqrt{d} < x' - y' \sqrt{d} \leq 1. \quad (15)$$

由(14)式和(15)式, 可以推出

$$2x' = (x' + y' \sqrt{d}) + (x' - y' \sqrt{d}) > 1 + 0 = 1,$$

$$2y' \sqrt{d} = (x' + y' \sqrt{d}) - (x' - y' \sqrt{d}) \geq 1 - 1 = 0.$$

由上述两式可见:  $x' > 0, y' \geq 0$ . 如果  $y' > 0$ , 那么  $(x', y')$  是方程(1)的正解, 由(14)式可见, 这与  $x_0$  及  $y_0$  为使  $x + y \sqrt{d}$  最小的那个正解相矛盾. 因此只能是  $y' = 0$ ; 由(14)式与(15)式又得  $x' \geq 1 \geq x'$ , 这只能是  $x' = 1$ , 这也就是说(13)式的中

间那一项实际上等于1, 即

$$x+y\sqrt{d} = (x_0+y_0\sqrt{d})^n.$$

定理五证完.

**定理六** 佩尔方程的全部整数解 $(x, y)$ , 由方程

$$x+y\sqrt{d} = \pm (x_0+y_0\sqrt{d})^n \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

所确定.

这一定理的证明是很明显的.  $n=0$  时, 决定着佩尔方程的显然解 $(\pm 1, 0)$ , 而当 $n$ 为自然数时,

$+(x_0+y_0\sqrt{d})^n$  决定着方程(1)的全部正解;

$-(x_0+y_0\sqrt{d})^n$  决定着方程(1)的全部负解;

当 $n$ 为负整数时, 由等式

$$(x_0+y_0\sqrt{d})^n = [(x_0+y_0\sqrt{d})^{-n}]^{-1}$$

可见,  $(x_0+y_0\sqrt{d})^n$  决定着第四象限中双曲线(1)上的全部整点,  $-(x_0+y_0\sqrt{d})^n$  则决定着第二象限中双曲线(1)上的全部整点.

最后, 看一个例子: 佩尔方程

$$x^2 - 3y^2 = 1$$

有正解 $(x_0, y_0) = (2, 1)$ , 按定理六, 其全部整数解 $(x, y)$ 由等式

$$x+y\sqrt{3} = \pm (2+\sqrt{3})^n \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

所确定.

例如, 令 $n=4$ , 因为

$$(2+\sqrt{3})^4 = 97+56\sqrt{3},$$

所以 $(97, 56)$ 就是原方程的一个整数解, 这是可以直接代入原方程来验证的.

## 八、面积的重迭原则

抽屉原则又称为重迭原则。实际上，第二节中所叙述的原则一、原则二和原则三，都是最简单的重迭原则。现在，要叙述另外一种重迭原则，这就是关于面积的重迭原则。

假定平面上有  $n$  个区域(所谓区域,是指由一条平面封闭曲线所围成的内部,例如一个圆或长方形的内部都可以叫做区域),它们的面积分别是  $A_1, A_2, \dots, A_n$ 。如果我们把这  $n$  个区域按任何方式一一搬到某一个面积为  $A$  的固定区域内部去,那末,当面积的和  $A_1 + A_2 + \dots + A_n$  大于  $A$  时,至少有两个区域具有公共点。

这个原则同样是很明显的,也可用反证法加以证明:假如它们搬到固定区域的内部而可以没有公共点,那么,它们的面积的和  $A_1 + A_2 + \dots + A_n$  顶多等于固定区域的面积  $A$ , 这跟假设不符合。

自然,对于体积也有类似的重迭原则。

现在,运用关于面积的重迭原则,来证明一个重要而有趣的定理。

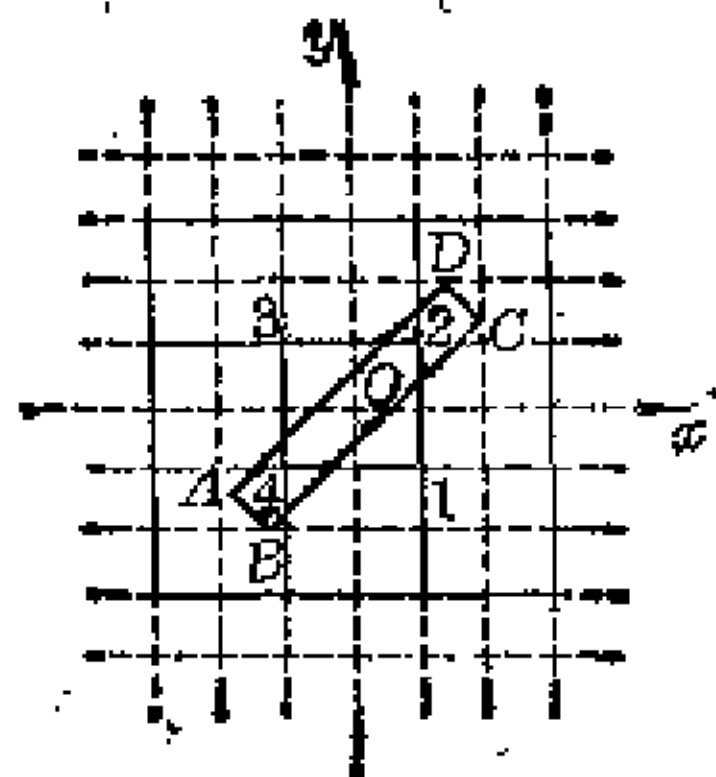


图 7

**定理一** 以原点  $O$  为对称中心,任意画一个长方形  $ABCD$  (图 7), 如果这长方形的面积大于 4, 那么,在它里面除了  $O$  点外,一定还有其他的整点。

**证明** 以那些坐标为偶数的整点  $(2k, 2l)$  为中心,作出一系列边长为 2

的正方形. 长方形  $ABOD$  必定被某些这样的  $2 \times 2$  的正方形所盖住. 把这些正方形一个一个地剪下来, 并把它们平行地移到和中心在  $O$  的那个  $2 \times 2$  的正方形  $1234$  相重合的位置上去. 自然, 这时长方形  $ABOD$  也被剪碎成好几片移到正方形  $1234$  里面去了.

注意: 正方形  $1234$  的面积等于 4, 而长方形  $ABOD$  的面积是大于 4 的. 根据面积的重迭原则, 至少有两个碎片会有公共点. 设一个公共点的坐标是  $(s, t)$ , 其中  $-1 \leq s \leq 1$ ,  $-1 \leq t \leq 1$ . 这就意味着, 在原来的长方形  $ABOD$  内有一个点  $P$ , 它的坐标是  $(2m+s, 2n+t)$ ; 还有一个点  $Q$ , 它的坐标是  $(2m'+s, 2n'+t)$  (图 8).

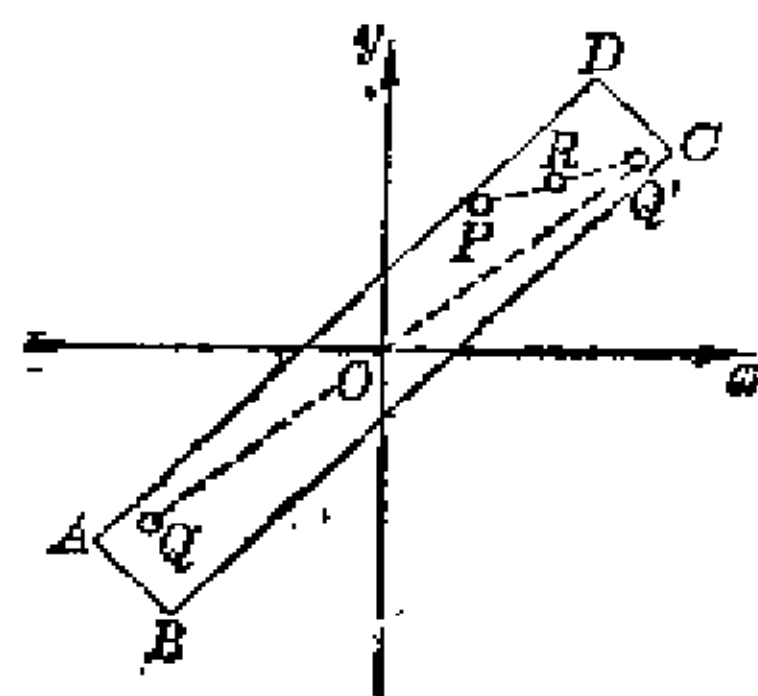


图 8

考察点  $Q$  关于原点  $O$  的对称点  $Q'$ . 由于已知长方形  $ABOD$  关于原点对称, 得知  $Q'$  必然也在此长方形内. 由对称性可知  $Q'$  的坐标是  $(-2m'-s, -2n'-t)$ . 既然  $P$  和  $Q'$  是长方形  $ABOD$  之内的两个点, 那么  $P$  和  $Q'$  的连线上的中点  $R$ , 也一定在这个长方形内. 可以算出  $R$  的两个坐标分别是

$$\frac{(2m+s) + (-2m'-s)}{2} = m - m'$$

和

$$\frac{(2n+t) + (-2n'-t)}{2} = n - n',$$

这表明  $R$  是包含在长方形  $ABOD$  中的一个整点, 并且,  $R$  和原点  $O$  显然是不同的, 这是因为, 若  $R=O$ , 即得  $m=m'$ ,  $n=n'$ , 也就是  $P=Q$ , 这是不可能的. 定理一证毕.



定理一是数论的一个分支:“数的几何”中的一个基本定理的一个特例. 如果读者希望学习这一基本定理,可参阅《格点和面积》一书(闵嗣鹤著,人民教育出版社1964年版).

利用定理一,我们来解决一个非常有趣的几何问题.

[例1] 设有一座圆形的公园,中心为 $O$ ,半径等于50米.以点 $O$ 为坐标原点,选取过 $O$ 的互相垂直的两条直线为坐标轴,建立平面直角坐标系.并选取单位长度为1米,如果在圆内除 $O$ 以外的每个整点处都种上一棵小树,那么,当这些小树长得足够粗的时候,从园子的中心 $O$ 环顾四周,视线都会被树干所遮断,使人看不到园子的边缘.现在问,当树干长到多粗时,才会发生所说的这种情况?

我们的答案是:当树干的半径大于 $\frac{1}{50}$ 米(即2厘米)时,从点 $O$ 朝任何方向看去,视线都会被遮断;而当树干的半径小于 $\frac{1}{\sqrt{2501}}$ 米时,至少在一个方向上视线不会被遮断.

**证明** 先证答案的第一部分.我们用 $\rho$ 表示树干的半径,并设 $\rho > \frac{1}{50}$ .显然,还必须认为 $\rho \leq \frac{1}{2}$ .

在圆 $O$ 中,取任一直径 $AB$ (如图9).过 $A$ 和 $B$ 两点分别作圆 $O$ 的切线,并作两直线 $FG$ 和 $EH$ 平行于 $AB$ ,且与 $AB$ 的距离均为 $\rho$ ,这样就得到了一个长方形 $EFGH$ .显然,长方形 $EFGH$ 的面积:

$$100 \times 2\rho > 100 \times 2 \times \frac{1}{50} = 4.$$

因此,根据定理一,在这个长方形

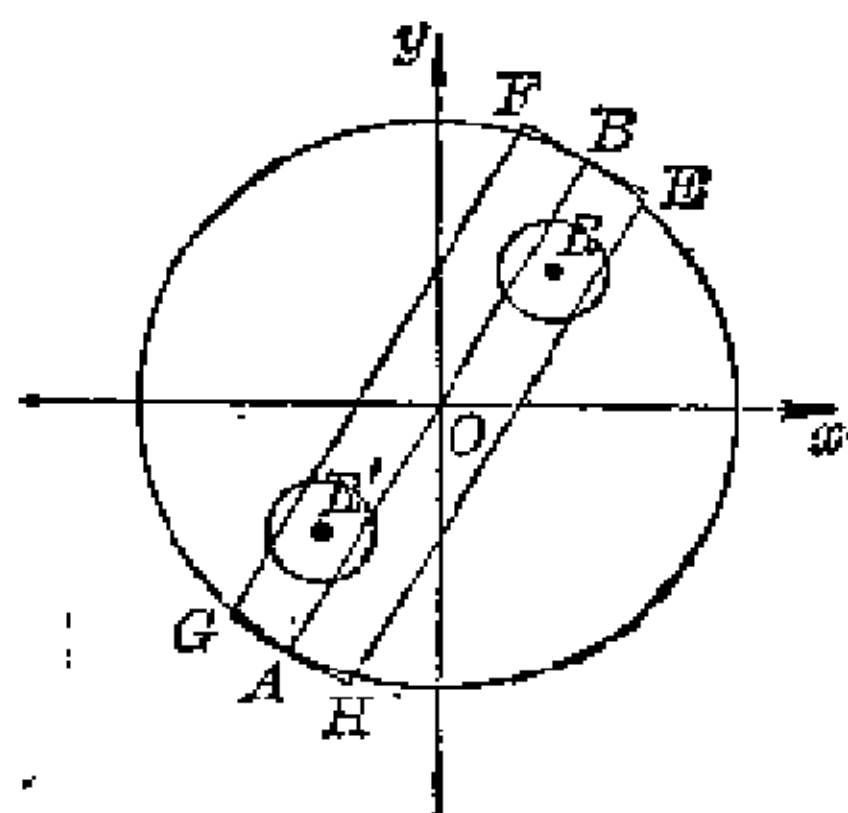


图 9

内有一个整点  $R$ . 实际上,  $R$  不但在这长方形内, 而且还在公园内部, 对于这一点, 可以证明如下: 设  $R = (m, n)$ , 其中  $m$  和  $n$  均为整数. 显然

$$\begin{aligned} m^2 + n^2 = \overline{OR}^2 &\leq \overline{OE}^2 \\ &= (50)^2 + \rho^2 \leq (50)^2 + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

由于  $m^2 + n^2$  是一个整数, 上不等式实际上是

$$m^2 + n^2 \leq (50)^2,$$

即是说,  $R$  还在公园之内.  $R$  的关于  $O$  的对称点  $R'$  应在此长方形内, 并且也在公园之内.

既然  $R$  和  $R'$  都是公园内的整点, 这两点都不与  $O$  重合, 因此, 这些点上种了树的. 很明显, 以  $R$  和  $R'$  为中心、以  $\rho$  为半径作出的两个小圆一定和直径  $AB$  在  $O$  的两边相交. 这就是说, 当  $\rho > \frac{1}{50}$  时,  $OA$  和  $OB$  两个方向的视线都会被树干遮断. 由于直径  $AB$  是任意作的, 所以, 这时站在  $O$  点无论朝哪一个方向上看去, 都将看不到公园的边界.

现在证明答案的第二部分. 在坐标为  $(50, 0)$  的点  $P$  处作圆  $O$  的切线, 在这切线上取坐标为  $(50, 1)$  的整点  $Q$  (图 10). 很明显, 在线段  $OQ$  上不再会有整点了. 在圆内的整点中, 离直线  $OQ$  最近的整点是  $R(49, 1)$ . 作  $BS \perp OQ$ . 由于

$$\triangle OPQ \sim \triangle QSR,$$

故有

$$\frac{\overline{RQ}}{\overline{QO}} = \frac{\overline{RS}}{\overline{QP}}.$$

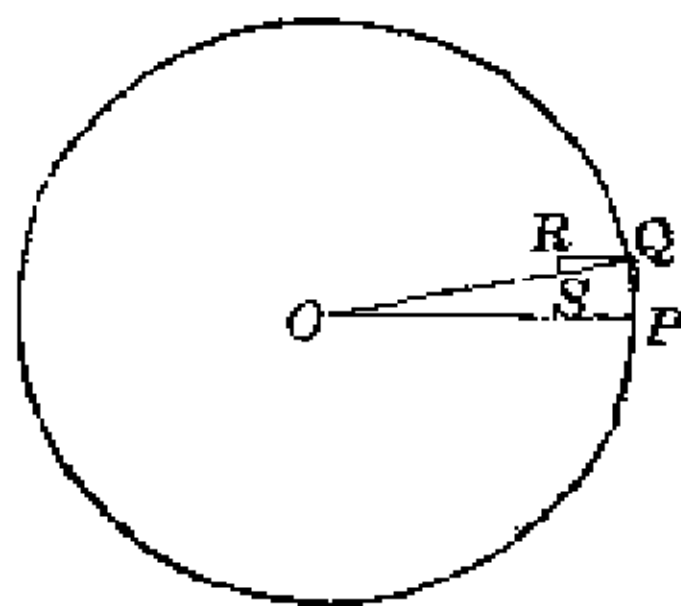


图 10

因此

$$\begin{aligned}\overline{RS} &= \overline{QP} \cdot \frac{\overline{RQ}}{\overline{QO}} \\ &= 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{(50)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2501}}.\end{aligned}$$

所以, 当  $\rho < \frac{1}{\sqrt{2501}}$  时,  $R$  那一点上的树干不会遮断  $OQ$  方向的视线, 其余整点上种的树, 就更不可能干扰视线  $OQ$  了!

讨论完毕.

显然, 如果  $n$  个区域的面积之和小于固定区域的面积, 即

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n < A,$$

那么, 把这  $n$  个区域任意搬到固定区域内部之后, 固定区域一定不能被这  $n$  个区域完全盖住, 即固定区域中至少有一个点不属于这  $n$  个区域中的任何一个区域.

用这样一个至为明显的道理, 也可以去解一些有趣的题目.

[例 2] 在一个  $20 \times 25$  的长方形中任意放进 120 个  $1 \times 1$  的小正方形. 证明: 在这个长方形中, 一定还可以放下一个直径为 1 的圆, 使之不和这 120 个小正方形中的任何一个相交.

解 我们用反证法来证明. 假设按某一种方式放进 120 个  $1 \times 1$  的小正方形之后, 再也放不进一个直径为 1 的圆, 我们将从中引出矛盾.

从长方形  $ABCD$  (图 11) 的每一边剪去一个宽为  $\frac{1}{2}$  的长条, 余下一个  $19 \times 24$  的长方形  $A'B'C'D'$ . 可以算出, 长方形  $A'B'C'D'$  的面积是 456.

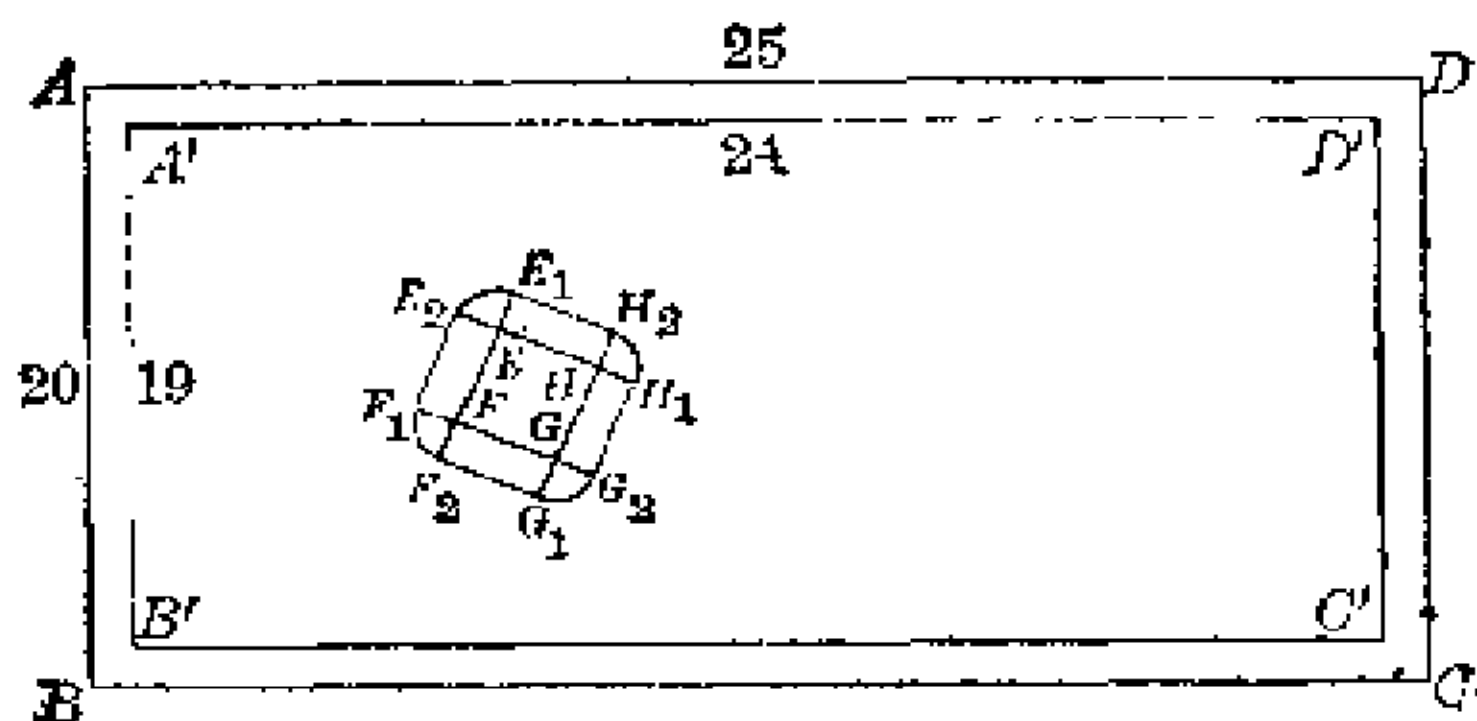


图 11

如果  $P$  为  $A'B'C'D'$  内的任一点, 以点  $P$  为中心, 以  $\frac{1}{2}$  为半径, 作一个圆, 它一定会全部在长方形  $ABCD$  之内. 依假定, 它一定会和某一个  $1 \times 1$  的小正方形  $EFGH$  相交, 这就是说,  $P$  到  $EFGH$  的(最短)距离不超过  $\frac{1}{2}$ .

在  $EFGH$  的四条边上各安装一个  $\frac{1}{2} \times 1$  的长条,  $EE_2F_1F$ ,  $FF_2G_1G$ ,  $GG_2H_1H$ ,  $HH_2E_1H$ ; 再在四个角上各安装四分之一一个半径为  $\frac{1}{2}$  的圆. 这样便得到一个图形  $E_1E_2F_1F_2G_1G_2H_1H_2$ , 这个图形的面积是

$$1 + 4 \times \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{12 + \pi}{4}.$$

由于  $P$  到  $EFGH$  的距离不超过  $\frac{1}{2}$ , 故  $P$  必落入这一图形中. 因为点  $P$  是在  $A'B'C'D'$  中任意选取的, 我们便可得到这样的结论: 长方形  $A'B'C'D'$  能被 120 个  $E_1E_2F_1F_2G_1G_2H_1H_2$  那种样子的图形完全盖住.

但是, 这是根本不可能的! 因为, 一方面

$$A'B'C'D' \text{ 的面积} = 456,$$

另一方面, 120 个那种图形的面积的总和为

$$120 \times \frac{12 + \pi}{4},$$

但是

$$120 \times \frac{12 + \pi}{4} < 120 \times \frac{12 + 3.2}{4} = 30 \times 15.2 = 456.$$

这个矛盾表明: 在长方形  $ABCD$  中任意放进 120 个  $1 \times 1$  的正方形之后, 一定还有一块空地可以放进一个直径为 1 的完整的圆.

## 练 习 题

运用抽屉原则，解下列各题：(1~7)

1. 从全世界任选六个人，其中一定可以找出三个人来，使得他们互相都认识，或者互相都不认识。

2. 下图中画出 3 行 9 列共 27 个小方格，将每一个小方格涂上红色或者蓝色。证明：不论如何涂色，其中必至少有两列，它们的涂色的方式相同。



(第 2 题图)

3. 在半径为 1 的圆周上任取  $n+1$  个点，求证：其中至少有两个点，它们之间的距离不超过  $2 \sin \frac{\pi}{n}$ 。

4. 有一个生产天平上用的铁盘的车间，由于工艺上的原因，只能控制盘子的重量在指定的  $a$  克到  $(a+0.1)$  克之间。现在需要重量相差不超过 0.005 克的两只铁盘来装配一架天平，问最少要有多少盘子，才能从中挑出符合要求的两只铁盘？

5. 用  $N$  来表示平面上两个坐标都为正整数的点的一个无穷集合，求证： $N$  中一定有两点  $(\alpha, \beta)$  和  $(\xi, \eta)$ ，使得

$$\alpha \leq \xi, \quad \beta \leq \eta.$$

6. 在平面上给出了无限多个矩形，它们顶点的直角坐标是  $(0, 0)$ 、 $(0, m)$ 、 $(n, 0)$ 、 $(n, m)$ ，其中  $m, n$  是正整数。证明：在这些矩形中，总存在两个矩形，其中的一个完全落在另一个之内。

7. 设有三个由自然数组成的数列：

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots,$$

$$b_1, b_2, \dots, b_n, \dots,$$

$$c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$$

证明: 一定存在一对正整数  $p$  和  $q$ , 使得  $a_p \geq a_q, b_p \geq b_q, c_p \geq c_q$  都成立. (1961 年第一届全俄数学竞赛试题)

8. 如果正整数  $n \geq 2$ , 求证和数

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

一定不是整数.

9. 证明函数  $[x]$  的下列性质:

(i)  $[x] + [y] \leq [x + y]$ ;

(ii) 若  $n$  为正整数, 则  $n[x] \leq [nx]$ ;

(iii) 若  $n$  为正整数, 则  $\left[ \frac{[nx]}{n} \right] = [x]$ ;

(iv)  $[2x] + [2y] \geq [x] + [x + y] + [y]$ .

10. 若  $n$  为正整数, 求证

$$[x] + \left[ x + \frac{1}{n} \right] + \dots + \left[ x + \frac{n-1}{n} \right] = [nx].$$

11. 证明: 任何奇数的平方, 关于模 8 与 1 同余.

12. 求证: 在数列

$$11, 111, 1111, \dots$$

中, 没有完全平方数.

13. 求出一个具有下述性质的自然数: 个位数字为 2; 将这个 2 移到该数最高位数字的左边, 得出的新数是原数的两倍.

14. 证明:

(i) 一个整数能被 3 整除, 必须而且只须它的各位数字之和能被 3 整除;

(ii) 一个整数能被 9 整除, 必须而且只须它的各位数字之和能被 9 整除.

15. 设  $3^{10000}$  的各位数字之和为  $a$ ,  $a$  的各位数字之和为  $b$ ,  $b$  的各位数字之和为  $c$ , 试求出  $c$ .

16. 设  $p_n = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n$  (这里  $n = 1, 2, 3, \dots$ ), 问对怎样的自然数  $n$ , 5 可以整除  $p_n$ ?

运用抽屉原则, 并结合剩余类的方法, 解下列各题: (17~22)

17. 已知  $a_1, a_2, \dots, a_7$  是正整数, 任意改变这七个数的顺序后记为

$b_1, b_2, \dots, b_7$ . 证明  $A = (a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \cdots (a_7 - b_7)$  是偶数.

18. 求证: 对任一自然数, 必有其某一整倍数, 使之包含着 0, 1, 2,  $\dots$ , 9 中的每一个数字.

19. 对于任一 30 位的整数  $M$ , 可以选得一个数  $X$ , 使能被 1979 整除, 且  $X$  的最后 30 位数字是  $M$ .

20. 证明: 对于  $n+1$  个不同的自然数  $a_i$ , 如果每一个均小于  $2n$ , 那么可以从中选出 3 个, 使其中的 2 个之和等于第 3 个.

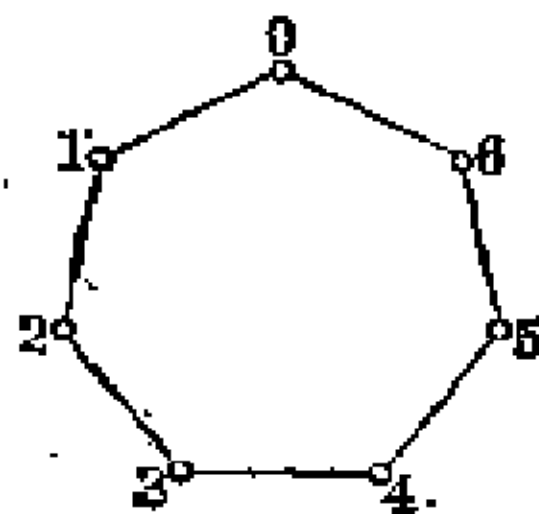
21. 任给五个整数, 证明从中必能选出三个, 使此三数之和能被 3 整除. (安徽省 1978 年中学生数学竞赛试题)

22. 设  $m$  为任一偶数,  $m$  个整数  $a_1, a_2, \dots, a_m$  适合下面两条件:

$$1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_m \leq m, \quad a_1 + a_2 + \dots + a_m = 2m.$$

求证: 一定可以把这  $m$  个数分为两组, 使得每组中各数之和相等, 即都等于  $m$ .

23. 如右图: 一枚棋子放在七角棋盘的第 0 格上, 现依反时针方向按照下述规则来移动这颗棋子: 第一次移动 1 格, 第二次移动 2 格, 第三次移动 3 格,  $\dots$ , 如此等等. 证明: 不论把棋子移动多少次, 第 2、4、5 号三个位置上总没有停棋的可能.



(第 23 题图)

24. 设  $a_1, a_2, \dots, a_{2n+1}$  是  $2n+1$  个有理数, 它们具有以下性质: 从中任意取出  $2n$  个, 必能分成两组, 每组中含有  $n$  个数, 且各组数字之和相等. 求证:

$$a_1 = a_2 = \dots = a_{2n+1}.$$

25. 证明不定方程  $x^2 - 4y^2 = 3$  没有整数解.

26. 证明不定方程

$$x^2 + 1 - 3y^n = 0 \quad (n \text{ 为任一自然数})$$

没有整数解.

27. 求方程组

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x^3 + y^3 + z^3 = -18 \end{cases}$$

的全部整数解. (1978 年全国部分省市中学生数学竞赛试题)



运用面积的重迭原则,解下列各题:(28~29)

28. 把66个直径为 $\sqrt{2}$ 的圆任意放到一个边长为10的正方形内,求证必有两个圆有公共点.

29. 在一个半径等于6的圆内任意地放6个半径为1的小圆. 证明: 其中总还有一块空位置,可以完整地放下另一个半径为1的小圆.

## 练习题解答概要

1. 把每一个人用一个点代表. 若某两个人是互相认识的,则在其“代表点”之间用红边相联;若某两人是互相不认识的,则在其“代表点”之间用蓝边相联. 然后,运用第二节例2的结论,即可得证.

2. 每列中只有三个小方格,每个小方格只有两种不同的涂色方法,因此,每一列只可能有 $2 \times 2 \times 2 = 8$ 种不同的涂色方式. 今有9列这样的格子,根据原则一,必至少有两列的涂色方式相同.

3. 把这个圆周分成 $n$ 等份. 根据原则一,至少有两个点在同一段小弧上. 显然,这两点之间距离小于圆内接正 $n$ 边形的边长,即 $2 \sin \frac{\pi}{n}$ .

4. 把重量在 $a$ 克到 $(a+0.1)$ 克的盘子,依重量来分类,使得重量不到 $(a+0.005)$ 克的为第一类,重量不小于 $(a+0.005)$ 克但又不到 $(a+0.005 \times 2)$ 克的为第二类,如此等等,这样一共可分为20类. 依抽屉原则一,21个盘子中必至少有两个属于同一类中,它们的重量即相差不超过0.005克,用它们即可装配一架天平.

5. 从 $N$ 中任取一点 $(x_0, y_0)$ ,把 $N$ 中的每一个点 $(x, y)$ 按照下列条件

(1)  $x > x_0, y > y_0$ ;

(2)  $x > x_0, y \leq y_0$ ;

(3)  $x \leq x_0, y > y_0$ ;

(4)  $x \leq x_0, y \leq y_0$

分在四个互不相交的类中.

如果第(1)类中至少有 $N$ 的一个点 $(\xi, \eta)$ ,则取 $\alpha = x_0, \beta = y_0$ ,那么适合要求的两点 $(\alpha, \beta)$ 和 $(\xi, \eta)$ 就被找到了. 同理,若第(4)类中至少有 $N$ 的一个点 $(\alpha, \beta)$ ,则取 $\xi = x_0, \eta = y_0$ ,适合要求的两点又被找到了.

所以,只须考察  $N$  的一切点全部在第(2)类和第(3)类中的情况.

首先,把第(2)类中的点  $(x, y)$  按下列条件:

$$x > x_0, \quad y = 1;$$

$$x > x_0, \quad y = 2;$$

.....

$$x > x_0, \quad y = y_0$$

分成  $y_0$  个更小的类. 同样,再把第(3)类中的点  $(x, y)$  按下列条件:

$$x = 1, \quad y > y_0;$$

$$x = 2, \quad y > y_0;$$

.....

$$x = x_0, \quad y > y_0$$

分成  $x_0$  个更小的类. 这样一来,  $N$  中的点被分配在这  $x_0 + y_0$  个互不相交的小类之中.  $N$  中的点的个数是无穷的,而小类的个数是有穷的,因此,按原则三,必有一个小类中含有  $N$  中的无穷个点,显然,其中任何两个点都适合要求.

6. 试与第5题比较.

7. 参考第5题之解法.

8. 把  $1, 2, \dots, n$  分解为

$$i = 2^{l_i} p_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

的形式,其中  $p_i$  为奇数,整数  $l_i \geq 0$ . 令  $l$  是  $l_1, l_2, \dots, l_n$  中的最大者,  $p = p_1 p_2 \dots p_n$ . 设法证明  $l_1, l_2, \dots, l_n$  中只有一个数为  $l$ , 其余数均小于  $l$ , 于是

$$2^{l-1} p \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) = \text{整数} + \frac{1}{2} \times \text{奇数},$$

故  $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$  必不能为整数.

9. (i) 由定义,有

$$[x] \leq x, \quad [y] \leq y.$$

据此,得  $[x] + [y] \leq x + y$ . 故  $[x] + [y]$  是一个不超过  $x + y$  的整数,自然不大于  $[x + y]$ .

(ii) 由(i),用数学归纳法即得.

(iii) 先设  $0 \leq \alpha < 1$ , 于是  $0 \leq n\alpha < n$ , 从而有

$$[n\alpha] \leq n\alpha < n,$$

$$0 \leq \frac{[n\alpha]}{n} < 1.$$

故

$$\left[ \frac{[n\alpha]}{n} \right] = 0 = [\alpha].$$

再令  $[x] = m$ , 于是  $x = m + \alpha$ , 其中  $0 \leq \alpha < 1$ . 于是

$$\begin{aligned} nx &= nm + n\alpha, \\ [nx] &= nm + [n\alpha], \\ \frac{[nx]}{n} &= m + \frac{[n\alpha]}{n}. \end{aligned}$$

故得

$$\left[ \frac{[nx]}{n} \right] = \left[ m + \frac{[n\alpha]}{n} \right] = m + \left[ \frac{[n\alpha]}{n} \right] = m + 0 = m = [x].$$

(iv) 令  $[x] = m$ ,  $[y] = n$ , 故

$$x = m + \alpha, \quad 0 \leq \alpha < 1;$$

$$y = n + \beta, \quad 0 \leq \beta < 1.$$

于是

$$[x+y] = [m+n+\alpha+\beta] = m+n+[\alpha+\beta],$$

$$[2x] = [2m+2\alpha] = 2m+[2\alpha],$$

$$[2y] = 2n+[2\beta].$$

故原不等式等价于

$$[\alpha+\beta] \leq [2\alpha] + [2\beta],$$

其中  $0 \leq \alpha < 1$ ,  $0 \leq \beta < 1$ . 而这个不等式是显然的.

10. 设  $[x] = m$ ,  $x = m + \alpha$ , 其中  $0 \leq \alpha < 1$ , 因此

$$[x] = m,$$

$$\left[ x + \frac{1}{n} \right] = m + \left[ \alpha + \frac{1}{n} \right],$$

$$\left[ x + \frac{2}{n} \right] = m + \left[ \alpha + \frac{2}{n} \right],$$

.....

$$\left[ x + \frac{n-1}{n} \right] = m + \left[ \alpha + \frac{n-1}{n} \right].$$

而  $[nx] = nm + [n\alpha]$ , 故原等式等价于等式

$$\left[ \alpha + \frac{1}{n} \right] + \left[ \alpha + \frac{2}{n} \right] + \cdots + \left[ \alpha + \frac{n-1}{n} \right] = [n\alpha],$$

其中  $0 \leq \alpha < 1$ . 由于

$$0 < \frac{1}{n} \leq \alpha + \frac{1}{n} < \alpha + \frac{n-1}{n} < 1 + \frac{n-1}{n} < 2,$$

故前述等式左边每一个整数非 0 即 1.

分两种情况继续讨论. 首先, 若  $\alpha + \frac{1}{n} \geq 1$ , 则上式左边  $= n-1$ , 而此时又

有  $n-1 \leq n\alpha < n$ , 故: 上式右边  $= n-1$ .

其次, 若有自然数  $k$ , 使

$$\alpha + \frac{k}{n} < 1, \quad \text{但} \quad \alpha + \frac{k+1}{n} \geq 1.$$

于是, 上等式左边  $= n - k - 1$ ; 而此时又有

$$n - k - 1 \leq na < n - k,$$

故上式右边为:  $[na] = n - k - 1$ .

11. 任何奇数均可表为  $2k+1$  的形式, 其中  $k$  为整数, 因为

$$(2k+1)^2 = 4k(k+1) + 1,$$

由于  $k(k+1)$  可被 2 整除, 因此  $4k(k+1) \equiv 0 \pmod{8}$ , 于是

$$(2k+1)^2 \equiv 1 \pmod{8}.$$

12. 假若此数列中有平方数, 那么它必为奇数之平方, 由前题可知, 它关于模 4 也与 1 同余. 但是, 对任意大于 2 的自然数  $p$ , 有

$$\underbrace{11 \cdots 111}_{p \text{ 个 } 1} = \underbrace{11 \cdots 100}_{p-2 \text{ 个 } 1} + \underbrace{11}_{p-2 \text{ 个 } 1} = \underbrace{11 \cdots 1}_{p-2 \text{ 个 } 1} \times 25 \times 4 + 11,$$

所以

$$11 \cdots 11 \equiv 11 \equiv 3 \pmod{4},$$

这是矛盾的.

13. 设此数为  $m$ , 且

$$m = \underbrace{\square \cdots \square}_{s \text{ 位}} 2,$$

把  $m$  去掉个位数字 2 后所得到的数记为  $a$ , 于是

$$m = a \times 10 + 2.$$

设新数为  $n$ , 依条件  $n = 2 \times 10^s + a$ , 并且  $n = 2m$ . 即

$$2 \times 10^s + a = 20 \times a + 4,$$

$$19a = 2 \times (10^s - 2).$$

由此可知, 必须有  $19 \mid (10^s - 2)$ , 即应选取  $s$ , 使

$$10^s \equiv 2 \pmod{19}.$$

由于

$$10^2 \equiv 5 \pmod{19},$$

故

$$10^4 \equiv 25 \equiv 6 \pmod{19},$$

$$10^8 \equiv 36 \equiv -2 \pmod{19},$$

$$10^{16} \equiv 4 \pmod{19},$$

$$10^{17} \equiv 40 \equiv 2 \pmod{19}.$$

故  $s=17$  是一个解. 所以, 原数为 105263157894736842.

14. 只证 (5)

设  $m = a_0 10^n + a_1 10^{n-1} + \cdots + a_{n-1} 10 + a_n$ , 其中  $a_0 \geq 1$ ,  $0 \leq a_i \leq 9$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ .

由于

$$10 \equiv 1 \pmod{9},$$

故对任何正整数  $k$ , 有

$$10^k \equiv 1 \pmod{9}.$$

因此

$$m \equiv a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n \pmod{9}.$$

故  $9|m$  必须且只须  $9|(a_0 + a_1 + \cdots + a_n)$ .

15. 由于  $3^2=9<10$ , 故

$$3^{10000} = 9^{5000} < 10^{5000},$$

我们知道,  $10^{5000}$  是最小的五千零一位数, 可见  $3^{10000}$  至多是一个五千位数, 所以

$$a \leq 9 \times 5000 = 45000 < 99999,$$

$$b < 5 \times 9 = 45 < 99,$$

$$c < 2 \times 9 = 18,$$

由于  $3^{10000}$  可被 9 整除, 因此, 反复用 14 题(ii)之结果, 得知  $c$  是一个能被 9 整除的正数, 故只能是  $c=9$ .

16. 由于  $3 \equiv -2 \pmod{5}$ ,  $4 \equiv -1 \pmod{5}$ , 故

$$p_n \equiv 1^n + 2^n + (-2)^n + (-1)^n \pmod{5}.$$

当  $n$  为奇数的时候, 显然  $p_n \equiv 0 \pmod{5}$ . 今设  $n$  为偶数:  $n=2s$ , 此时

$$p_{2s} \equiv 2(1+2^{2s}) \equiv 2(1+4^s) \equiv 2(1+(-1)^s) \pmod{5},$$

由此可见, 当  $s$  为奇数时,  $5|p_{2s}$ ; 当  $s$  为偶数时,

$$p_{2s} \equiv 4 \pmod{5}.$$

综合上两结果, 可知当  $n$  不是 4 的整倍数时,  $5|p_n$ .

17. 七个数分成奇数、偶数两类时, 按原则二, 必有一类至少有四个数. 因而, 在乘积  $A$  的七个因数中, 至少有一个因数, 它的相减的两数在同一类中(即同奇偶), 这一因数即是偶数, 从而可推知  $A$  为偶数.

18. 令  $A=1234567890$ , 考察数列

$$A, AA, AAA, AAAA, \dots, \underbrace{AA \cdots A}_{m+1 \text{ 个}}$$

于是, 对任何自然数  $m$ , 上数列中必至少有两数属于关于模  $m$  的同一剩余类. 而这两数之差, 即为  $m$  的整倍数, 它包含 0, 1, 2, ..., 9 中每一数字.

19. 考察数列  $\{m_i\}$ :

$$m_1=M, m_2=MM, \dots, M_i=\underbrace{MM \cdots M}_i, \dots, M_{1979}=\underbrace{MM \cdots M}_{1979 \text{ 个}}.$$

上述 1979 个数中, 假若有一为 1979 的倍数, 那么结论便得证了; 如果无一被 1979 整除, 则必有两数, 它们关于模 1979 同余(设为  $M_k, M_l$ , 并设  $k>l$ ), 那么  $1979|(M_k-M_l)$ , 其中

$$M_k-M_l=\underbrace{MM \cdots M}_{k-l \text{ 个}}\underbrace{00 \cdots 00}_{30l \text{ 个}}.$$

把  $M_k - M_l$  的尾数的 30% 个零截去, 又得一新数  $X$ , 可以证明  $X$  具有所要求的性质. 这是因为  $1979 \mid (M_k - M_l)$ , 即  $1979 \mid X \times 10^{303}$ , 而 1979 与  $10^{303}$  互素, 故  $1979 \mid X$ .

20 不妨设这  $n+1$  个自然数已排成上升数列:

$$a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n.$$

令  $b_i = a_i - a_0$  (其中  $i=1, 2, \dots, n$ ). 那么, 显然有

$$0 < b_1 < b_2 < \cdots < b_n < a_n < 2n.$$

考察  $2n$  个自然数:  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ . 显然它们都小于  $2n$ . 由原则一, 其中必有两数相等, 即有  $a_k = b_i$ . 于是有  $a_i = a_0 + a_k$ , 并由此可知  $i \neq k$ . 故三个不同的数  $a_0, a_k, a_i$  符合题目要求.

21. 如果在以 3 为模的三个不同的剩余类中, 每一类都有这五个整数中的某些数, 那么从各类都抽一个数出来, 三数之和当然能被 3 整除. 若五个整数只分布在两个剩余类中, 那么根据原则二, 必有一类中至少含三个整数, 而此三数之和必定是 3 的整倍数.

22. 令

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad \dots, \quad s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m = 2m,$$

又作一整数  $(a_1 - a_m)$ , 考察下列  $m+1$  个整数

$$s_1, s_2, \dots, s_m, (a_1 - a_m),$$

根据抽屉原则, 它们之中一定有两个数关于模  $m$  同余. 分两种情况来讨论.

(1) 如果有整数足标  $i, j$  适合  $1 \leq i < j \leq m$  并使得  $s_j \equiv s_i \pmod{m}$ , 即

$$m \mid (s_j - s_i),$$

由于  $1 \leq (s_j - s_i) < s_j \leq s_m = 2m$ , 所以  $m \mid (s_j - s_i)$  只能是  $s_j - s_i = m$ , 亦即

$$a_{i+1} + \cdots + a_j = m,$$

由此可见, 把  $\{a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_j\}$  当成一组, 余下的整数全归为另一组, 那么这两组中数字之和将都是  $m$ ;

(2) 假如某一个  $s_i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) 与  $(a_1 - a_m)$  同余, 即  $m \mid (s_i - a_1 + a_m)$ , 这时再细分为三种情况.

(i) 如果  $i=1$ , 就是  $m \mid a_m$ , 但因  $1 \leq a_m \leq m$ , 故只能是  $a_m = m$ , 这时两组数

$$\{a_1, a_2, \dots, a_{m-1}\}, \quad \{a_m\}$$

有相同的和数;

(ii) 如果  $i=m$ , 这时  $s_i - a_1 + a_m = s_m - a_1 + a_m = 2m + a_m - a_1$ , 而  $m \mid (2m + a_m - a_1)$  相当于  $m \mid (a_m - a_1)$ , 但因  $0 \leq a_m - a_1 < a_m \leq m$ , 故只能是  $a_m - a_1 = 0$ , 即  $a_1 = a_m$ , 由题设条件知

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_m = 2,$$

这时从中任取  $\frac{m}{2}$  个数为一组, 其余  $\frac{m}{2}$  个数为一组, 显然这两组数的和相等;

(ii) 设  $2 \leq i \leq m-1$ , 于是

$$s_i = a_1 + a_m = a_2 + \cdots + a_i + a_m,$$

但因  $1 < a_2 + \cdots + a_i + a_m < s_m = 2m$ , 故只能得

$$a_2 + \cdots + a_i + a_m = m,$$

这时取  $\{a_2, \dots, a_i, a_m\}$  为一组, 其余各数归为另一组, 显然这两组数符合题目的要求(证完).

顺便指出, 在本题中, 即使  $m$  为一奇数, 只要排除  $a_1 = a_2 = \cdots = a_m = 2$  这一极特殊的情况, 本题的结论仍然是成立的.

23. 移动  $n$  次, 共走过

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (\text{格}),$$

实际上, 棋子所在的位置应是此数关于模 7 的余数. 设

$$n \equiv r \pmod{7}, \quad 0 \leq r \leq 6,$$

易证:

$$\frac{n(n+1)}{2} \equiv \frac{r(r+1)}{2} \pmod{7}.$$

对于  $r = 0, 1, 2, \dots, 6$ , 直接算出停棋位置, 可以发现正好不停在第 2、4、5 号格.

24. 容易知道, 如果  $a_1, a_2, \dots, a_{2n+1}$  具有题中所描述性质, 那么对任何整数  $c$ , 数列

$$a_1 + c, a_2 + c, \dots, a_{2n+1} + c$$

以及

$$ca_1, ca_2, \dots, ca_{2n+1}$$

也将具有题中所述性质.

不妨设数列  $a_1, a_2, \dots, a_{2n+1}$  已按从小到大的顺序排列:

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_{2n+1},$$

由于它们都是有理数, 用它们的分母的正的最小公倍数遍乘各项, 得出的数列

$$b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq \cdots \leq b_{2n+1}$$

是一整数列, 并具有同一性质. 将  $(-b_1)$  加到每一项上, 又得到数列

$$0 \leq c_2 \leq c_3 \leq \cdots \leq c_{2n+1},$$

它仍是一整数列, 还具有同一性质. 可以证明, 这时  $c_2, c_3, \dots, c_{2n+1}$  必须全为偶数. 因此, 数列

$$0 \leq \frac{c_2}{2} \leq \frac{c_3}{2} \leq \cdots \leq \frac{c_{2n+1}}{2}$$

为整数列, 并且具有同一性质; 再由此推得

$$0, \frac{c_2}{2}, \frac{c_3}{2}, \dots, \frac{c_{2n+1}}{2};$$

$$0, \frac{c_2}{2^2}, \frac{c_3}{2^2}, \dots, \frac{c_{2n+1}}{2^2}$$

都是偶数,这样反复推断下去,自然可知

$$c_2 = c_3 = \cdots = c_{2n+1} = 0,$$

于是

$$b_1 = b_2 = \cdots = b_{2n+1},$$

亦即

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_{2n+1}.$$

**25.** 若方程  $x^2 - 4y^2 = 3$  有整数解  $(x, y)$ , 那么

$$x^2 \equiv 3 \pmod{4}.$$

显然,  $x$  不能是偶数; 再由第 11 题, 任何奇数的平方关于模 4 与 1 同余, 故知  $x$  也不能是奇数, 这是矛盾的.

**26.** 若方程  $x^2 + 1 = 3y^2$  有整数解  $(x, y)$ , 那么

$$x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{3}.$$

上述同余式是不能被任何整数  $x$  所满足的.

**27.** 因为有恒等式

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy),$$

于是, 当  $x + y + z = 0$  时, 就有

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz.$$

但  $x^3 + y^3 + z^3 = -18$ , 故  $xyz = -6$ , 因此只能是如下六种情况:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

**28.** 每一个圆的面积为  $\pi \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} \pi$ , 66 个小圆的面积的总和为

$$66 \times \frac{1}{2} \pi = 33 \times \pi = 33 \times 3.1415 \cdots > 33 \times 3.1 = 102.3.$$

这个数字大于正方形的面积  $10 \times 10 = 100$ . 由面积的重迭原则, 知必有两个圆有公共点.

**29.** 证明的思想方法和第八节中例 2 的证法完全相同. 可用反证法. 假若在大圆中放下 6 个小圆之后再也找不到放另外一个小圆的地方, 那么 6 个半径等于  $1+1=2$  的圆将完全盖住一个半径等于  $6-1=5$  的圆. 这是不可能的, 因为

$$6\pi \times 2^2 = 24\pi < 25\pi = \pi \times 5^2.$$